

Ciencia Latina
Internacional

Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, Ciudad de México, México.
ISSN 2707-2207 / ISSN 2707-2215 (en línea), julio-agosto 2024,
Volumen 8, Número 4.

https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v8i4

**MÉTODO DE LAS FUERZAS PARA VIGAS
HIPERESTÁTICAS DE HORMIGÓN
CONSIDERANDO LAS DEFORMACIONES
POR CORTANTE**

**FORCE METHOD FOR HYPERSTATIC CONCRETE
BEAMS CONSIDERING SHEAR DEFORMATIONS**

Carlos Enrique Villarroel Bejarano

Universidad Privada del Valle, Bolivia

DOI: https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v8i3.12226

Método de las Fuerzas para Vigas Hiperestáticas de Hormigón Considerando las Deformaciones por Cortante

Carlos Enrique Villarroel Bejarano¹

cvillarroelb@univalle.edu

<https://orcid.org/0009-0003-4561-8074>

Universidad Privada del Valle

Bolivia

RESUMEN

El objetivo de la investigación fue calcular la variación de las fuerzas internas de vigas hiperestáticas de hormigón mediante el método de las fuerzas, considerando el aporte de las deformaciones por cortante. Se planteó un modelo genérico de viga hiperestática de hormigón con vanos iguales, sometido a cargas concentradas en el centro de cada vano. Aplicando el método de las fuerzas se determinó el sistema de ecuaciones que gobierna el modelo, con lo que se obtuvieron las fuerzas internas. El modelo se trabajó con base en tres elementos fundamentales: la deformación por cortante, la deformación por flexión y las propiedades del material. Se determinó que las vigas de hormigón sufren un incremento importante en los momentos flectores cuando se consideran las deformaciones por cortante, llegando a un incremento máximo del 14% para vanos muy cortos. Finalmente, esta investigación plantea que para vanos con longitudes superiores a 2 metros la influencia de la deformación por cortante puede considerarse insignificante.

Palabras clave: deformación por cortante, método de las fuerzas, viga hiperestática de hormigón

¹ Autor principal.

Correspondencia: cvillarroelb@univalle.edu

Force Method for Hyperstatic Concrete Beams Considering Shear Deformations

ABSTRACT

The objective of the research was to calculate the variation of the internal forces of hyperstatic concrete beams using the force method, considering the contribution of shear deformations. A generic model of hyperstatic concrete beam was proposed, with equal spans, subjected to concentrated loads in the center of each span. By applying the force method, the system of equations that governs the model was determined, with which the internal forces were obtained. The model was based on three fundamental elements: shear deformation, flexural deformation and material properties. It was determined that concrete beams suffer a significant increase in bending moments when shear deformations are considered, reaching a maximum increase of 14% for very short spans. Finally, this research states that for spans with lengths greater than 2 meters, the influence of shear deformation can be considered insignificant.

Keywords: shear deformation, force method, hyperstatic concrete beams

Artículo recibido 10 mayo 2024

Aceptado para publicación: 28 junio 2024



INTRODUCCIÓN

El método de las fuerzas es una herramienta importante dentro de la ingeniería estructural debido a la poca cantidad de variables que se necesitan para resolver problemas de vigas hiperestáticas. Este método se basa en las formulaciones propuestas por Mhor y Müller-Breslau el cual consiste en “escribir las ecuaciones que satisfacen los requisitos de compatibilidad y de fuerza-desplazamiento para la estructura con el fin de determinar las fuerzas redundantes” (González et al., 2017). Esas fuerzas redundantes son las que representan a los apoyos que aportan grados de hiperestaticidad a las vigas y deben tratarse como cargas desconocidas o incógnitas para realizar el análisis estructural. Las fuerzas redundantes deben “producir deformaciones compatibles con los apoyos originales” (Beer et al., 2010) los cuales generalmente se asumen indesplazables facilitando el proceso de cálculo que puede realizarse desde 2 enfoques diferentes dentro de los métodos denominados “clásicos”: Métodos de Fuerzas y Métodos de desplazamientos como lo sugiere McCormac (2011).

El método de las fuerzas además se puede utilizar como base para la resolución de problemas más complejos como la discretización de estructuras casi regulares y su modelación por elementos finitos, soluciones avanzadas que se aprecian en los trabajos propuestos por Kaveh & Ebrahimi (2012) y Kaveh et al. (2014).

Aunque se trata de un método de análisis clásico, el método de las fuerzas es utilizado, por ejemplo, para realizar cálculo optimizado de estructuras bajo la metodología de Análisis y Diseño simultáneo (SAND, por sus siglas en inglés) como los realizados por Kaveh & Malakouti (2010) y más específicamente trabajos de aplicación de esta metodología en tipologías específicas de estructuras como las cerchas tridimensionales resueltas mediante análisis matricial (Descamps & Filomeno Coelho, 2014). Por otro lado, el método de las fuerzas se enseña comúnmente en programas de Ingeniería Civil, estructural y mecánica en universidades de todo el mundo, por ello la pertinencia de la presente investigación. Dada la versatilidad del método de las fuerzas, éste puede aplicarse para el análisis de edificios de hormigón con el propósito de encontrar las solicitaciones o fuerzas internas de sus elementos estructurales como es el caso de las vigas hiperestáticas.

Las vigas hiperestáticas son de uso común en edificios por lo que su diseño principalmente es realizado para soportar cargas gravitacionales que provocan flexión en el miembro estructural. Aunque la fuerza



cortante también aparece en este tipo de elementos estructurales, se considera una sollicitación “secundaria” ya que no es indispensable para equilibrar las cargas externas y por esta razón tiende a despreciarse o calcularse solamente en casos particulares (Prato & Massa, 2020). Sabemos que los momentos flectores están directamente relacionados a la deformación longitudinal de la viga, sin embargo, la deformación transversal por fuerza cortante puede tener un efecto amplificador de dichos momentos, tal como lo sugiere Luévanos (2011).

Las sollicitaciones que actúan sobre vigas de edificios pueden ser de Flexión, tracción, compresión, cortante, torsión, además de efectos térmicos y asentamientos diferenciales. Sin embargo, la sollicitación que gobierna el diseño en casi todos los casos es la flexión por lo que tiende a despreciarse el efecto que puedan causar las otras sollicitaciones. El efecto de la deformación por cortante puede despreciarse en el análisis de la mayoría de las estructuras corrientes, sin embargo, en el caso de vanos muy cortos de vigas y cargas considerables, el efecto de la fuerza cortante tendrá un valor significativo (Sussekind, 1980).

Las técnicas de análisis estructural de vigas continuas basadas en el principio de trabajo virtual, que es sustento del método de las fuerzas, tienden a despreciar el aporte de las deformaciones por cortante en el cálculo de las sollicitaciones. Como referencia se tienen los resultados obtenidos por Luévanos (2012) quien aplicando el método de desplazamientos o Pendiente – Deflexión a vigas hiperestáticas de acero encontró que los momentos flectores se incrementan en el orden del 9% para vanos de 3 metros cuando se toman en cuenta las deformaciones por cortante.

El presente trabajo pretende demostrar la influencia de las deformaciones por cortante en las sollicitaciones de vigas hiperestáticas de hormigón, utilizando el método de las Fuerzas para su análisis.

METODOLOGÍA

El método con el que se plantea el siguiente modelo consiste en resolver las integrales que definen las fuerzas internas o sollicitaciones de vigas hiperestáticas de hormigón. Estas sollicitaciones, que son causadas a partir de la variación de las longitudes de vanos o distancia entre apoyos y la posición de la carga, “consisten en una fuerza normal, una fuerza cortante y un momento flexionante” (Hibbeler, 2012). Al ser el momento flexionante la sollicitación principal en vigas hiperestáticas, el método plantea realizar el análisis a flexión incorporando y sin incorporar las deformaciones por cortante de la viga

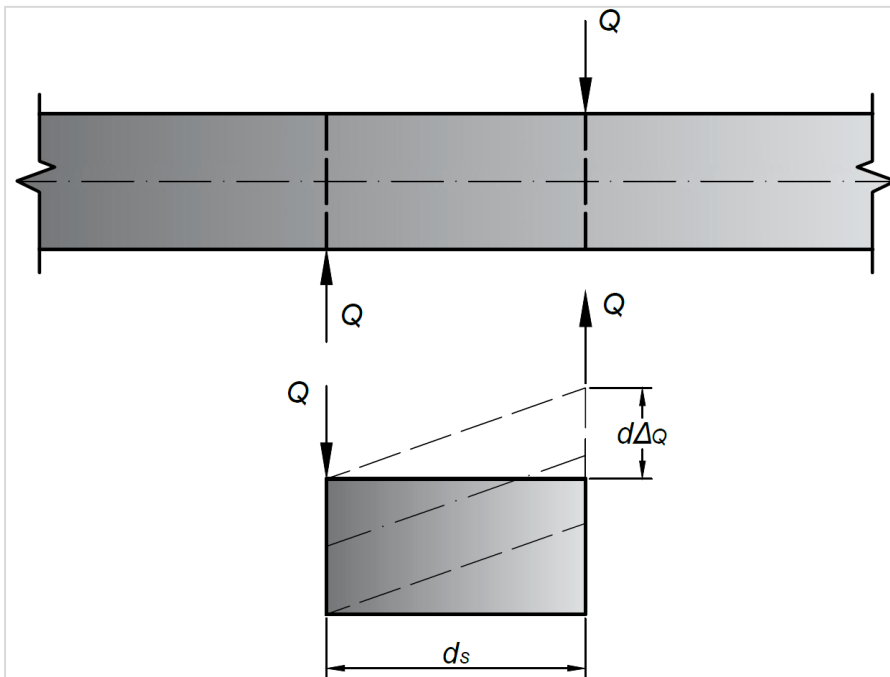
asumiendo que esta “es causada por la respuesta de un material elástico lineal” (Hibbeler, 2012). No se incluye en este trabajo la deformación por fuerza normal.

Bajo este marco la presente investigación incorpora en el modelo de análisis propuesto 3 elementos fundamentales: La deformación por cortante, la deformación por flexión y las propiedades del material, que se explican a continuación.

Deformación por Cortante

La deformación por cortante se define como el “desplazamiento relativo de dos secciones separadas a una distancia d_s debido a Q ” (Sussekind, 1980). Observe la Figura 1. Si se toma un elemento diferencial de viga d_s sometida a fuerza cortante Q , se producirá un incremento en la deformación por fuerza cortante $d\Delta_Q$:

Figura 1 Incremento de deformación debida a la fuerza cortante



Nota. Adaptada de Alemán (2022). Estructuras Hiperestáticas (p.27)

El incremento de la deformación por fuerza cortante puede calcularse con la ecuación (1):

$$d\Delta_Q = \frac{f_s Q d_s}{GA} \quad (1)$$

Donde:

f_s = Factor de forma para cortante

Q = Fuerza cortante


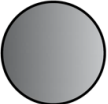

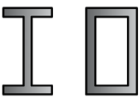
d_s = Diferencial de longitud

G = Módulo de elasticidad a cortante

A = Área de la sección transversal

El factor de forma para cortante representa la variación del esfuerzo cortante a lo largo de la sección transversal y puede tomarse de la tabla 1:

Tabla 1 Factor de forma para cortante

Forma	Sección	f_s
	Rectangular	$\frac{6}{5}$
	Circular	$\frac{10}{9}$
	Tubo de pared delgada	2
	Sección I o tubo cuadrado	$\frac{A}{A_{atma}}$

Nota. Adaptado de Gere & Timoshenko (1986). Mecánica de materiales. (2da. Ed.)

Como se registra en la tabla 1, el factor f_s es igual a $6/5$ y se emplearán con 3 vigas rectangulares de distinta sección transversal que se utilizarán en el modelo, en adelante llamadas especímenes. Aunque la deformación por cortante, objeto de análisis en este trabajo, teóricamente ejerce influencia pequeña en las solicitaciones de vigas hiperestáticas y puede ser despreciada como lo sugiere (Sussekind, 1980), será añadida a la deformación por flexión para calcular las fuerzas internas de la viga.

Deformación por flexión

Siguiendo con la metodología planteada para determinar las solicitaciones de vigas hiperestáticas por el método de las fuerzas, es necesario calcular las deformaciones por flexión. Según McCormac (2011) la deflexión en cualquier parte de una viga, aplicando la ley de conservación de la energía y el principio de trabajos virtuales puede calcularse con la ecuación (2):

$$\Delta_f = \int \frac{MM'}{EI} ds \quad (2)$$

Donde:

M = Ecuaciones de momento flector del sistema real

M' = Ecuaciones de momento flector del sistema virtual

E = Módulo de elasticidad longitudinal del material

I = Momento de inercia de la sección

De forma análoga, si se desea añadir el efecto de la fuerza cortante en el cálculo de la deflexión deberá sumarse la ecuación (3) sabiendo que es válido el principio de superposición de efectos:

$$\Delta_Q = \int \frac{f_s QQ'}{GA} ds \quad (3)$$

Donde:

Q = Ecuaciones de fuerza cortante del sistema real

Q' = Ecuaciones de fuerza cortante del sistema virtual

G = Módulo de elasticidad transversal del material

A = Área de la sección

f_s = Factor de forma para cortante (Tabla 1)

Al sumar ambos efectos, la deformación por flexión y la deformación por cortante, tendremos la posibilidad de aplicar las propiedades del material para el cálculo de las reacciones redundantes de la viga hiperestática y por tanto las sollicitaciones o fuerzas internas.

Propiedades del material

El modelo se entiende como una viga hiperestática de hormigón, por lo que resulta indispensable establecer las propiedades físico-mecánicas de este material. Para calcular el módulo de elasticidad longitudinal de hormigones de peso normal, se indica la siguiente expresión (Comité ACI 318, 2019):

$$E_c = 4700\sqrt{f'_c} [MPa]$$

Para un hormigón convencional con resistencia a la compresión de 21 MPa tenemos.

$$E_c = 4700\sqrt{21} = 21.538MPa = 2'196.265 \frac{t}{m^2}$$



Diferentes autores como Wight & MacGregor (2012) o McCormac & Brown (2016) sugieren el valor del coeficiente de Poisson del hormigón $\nu = 0,20$.

El módulo de elasticidad transversal puede calcularse mediante la siguiente expresión (Gere & Goodno, 2009):

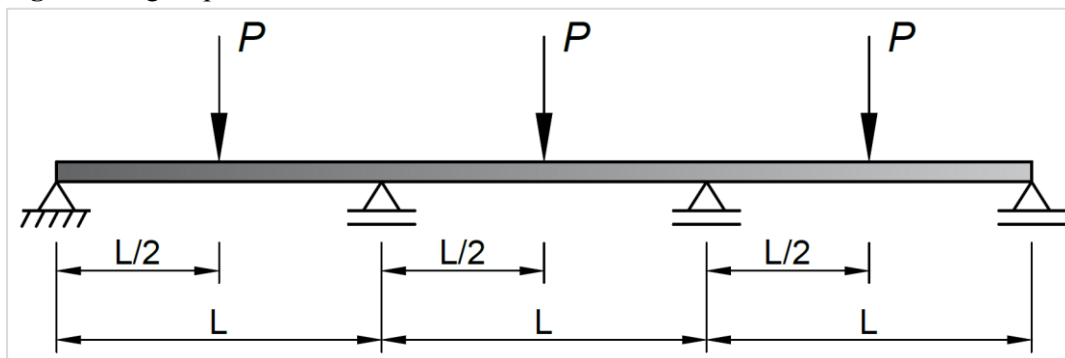
$$G = \frac{E_c}{2(1 + \nu)} = \frac{2'196.265}{2(1 + 0,20)} = 915.110 \frac{t}{m^2}$$

Ambos parámetros, el módulo de elasticidad longitudinal E y el módulo de elasticidad transversal G serán incorporados en el modelo propuesto a continuación.

Modelo propuesto

Se desarrolló el análisis estructural del modelo genérico de viga hiperestática con 3 vanos iguales y cargas puntuales de 1 tonelada en el centro de cada vano que se muestra en la figura 2. Los insumos para resolver este modelo de viga hiperestática utilizando el método de las fuerzas se mencionaron en los acápites 2.1, 2.2 y 2.3. La longitud L se ha ido variando entre 1 hasta 10 metros, para obtener las sollicitaciones.

Figura 2 Viga hiperestática



Nota. Elaboración propia

Datos:

$$P = 1t$$

$$L = \text{entre } 1 \text{ a } 10m$$

Propiedades del material para la viga de hormigón

$$E = 2'196.265 t/m^2$$

$$G = 915.110 t/m^2$$

A partir de estos datos, se realizó variantes del análisis para 3 vigas de hormigón armado (especímenes), de diferente sección transversal con la finalidad de visualizar la diferencia en las solicitaciones. Las secciones transversales de los 3 especímenes se muestran en la tabla 2:

Tabla 2 Secciones transversales de 3 especímenes analizados

Especimen	b (m) base de la viga	h (m) altura de la viga
I	0.20	0.40
II	0.25	0.50
III	0.30	0.60

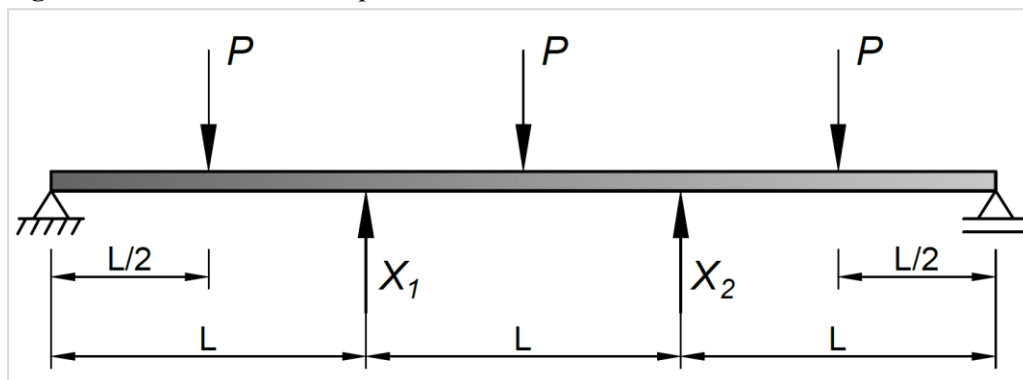
Si bien pueden existir muchas variaciones en las secciones de vigas, las secciones propuestas para estos 3 especímenes son típicas en edificios de hormigón por su facilidad constructiva. Estos han sido analizados mediante el método de las fuerzas para el mismo modelo.

Resolución por el método de las fuerzas

Los apoyos redundantes de la viga hiperestática se convierten en las incógnitas X_1 y X_2 y se aplican como fuerzas puntuales en los nudos correspondientes, convirtiéndose en un sistema isostático equivalente de fácil resolución debido a que el sistema se considera isostático “si todas las reacciones de sus apoyos se pueden establecer resolviendo las ecuaciones de equilibrio estático” (Kassimali, 2015).

La Figura 3 muestra el modelo propuesto para este análisis.

Figura 3 Sistema isostático equivalente



Nota. Elaboración propia

El sistema isostático equivalente debe resolverse eliminando las incógnitas X_1 y X_2 con lo que obtienen las solicitaciones debidas a las cargas externas P , el cual llamaremos sistema “real”.

Siguiendo la metodología se aplica una fuerza unitaria en lugar de las incógnitas X_1 y X_2 con lo que se las fuerzas internas por separado de lo que llamaremos sistemas “auxiliares”.

El método de las fuerzas permite relacionar las solicitaciones y deformaciones mediante ecuaciones de compatibilidad que aplican los principios de proporcionalidad y superposición de efectos. Esto se traduce en el sistema de ecuaciones (4):

$$\begin{cases} \Delta_{11}X_1 + \Delta_{12}X_2 = -\Delta_{10} \\ \Delta_{21}X_1 + \Delta_{22}X_2 = -\Delta_{20} \end{cases} \quad (4)$$

Aplicando las ecuaciones (2) y (3) en función de una variable de longitud con los correspondientes límites de integración obtenemos las deformaciones Δ_{ij} expresadas mediante las ecuaciones (5), (6), (7), (8) y (9):

$$\Delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^L \left(-\frac{2x}{3}\right) \left(-\frac{2x}{3}\right) dx + \int_L^{3L} \left(\frac{x}{3} - L\right) \left(\frac{x}{3} - L\right) dx \right] + \frac{f_s}{GA} \left[\int_0^L \left(-\frac{2}{3}\right) \left(-\frac{2}{3}\right) dx + \int_L^{3L} \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right) dx \right]$$

$$\Delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\frac{4L^3}{9} \right] + \frac{f_s}{GA} \left[\frac{2L}{3} \right] \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{12} = \frac{1}{EI} & \left[\int_0^L \left(-\frac{2x}{3}\right) \left(-\frac{x}{3}\right) dx + \int_L^{2L} \left(\frac{x}{3} - L\right) \left(-\frac{x}{3}\right) dx + \int_{2L}^{3L} \left(\frac{x}{3} - L\right) \left(\frac{2x}{3} - 2L\right) dx \right] \\ & + \frac{f_s}{GA} \left[\int_0^L \left(-\frac{2}{3}\right) \left(-\frac{1}{3}\right) dx + \int_L^{2L} \left(\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{3}\right) dx + \int_{2L}^{3L} \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) dx \right] \end{aligned}$$

$$\Delta_{12} = \frac{1}{EI} \left[\frac{7L^3}{18} \right] + \frac{f_s}{GA} \left[\frac{L}{3} \right] \quad (6)$$

$$\Delta_{22} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{2L} \left(-\frac{x}{3}\right) \left(-\frac{x}{3}\right) dx + \int_{2L}^{3L} \left(\frac{2x}{3} - 2L\right) \left(\frac{2x}{3} - 2L\right) dx \right] + \frac{f_s}{GA} \left[\int_0^{2L} \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{1}{3}\right) dx + \int_{2L}^{3L} \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) dx \right]$$

$$\Delta_{22} = \frac{1}{EI} \left[\frac{4L^3}{9} \right] + \frac{f_s}{GA} \left[\frac{2L}{3} \right] \quad (7)$$



$$\begin{aligned}
\Delta_{10} = & \frac{1}{EI} \left[\int_0^{L/2} \left(-\frac{2x}{3}\right) \left(\frac{3Px}{2}\right) dx \right. \\
& + \int_{L/2}^L \left(-\frac{2x}{3}\right) \left(\frac{Px}{2} + \frac{PL}{2}\right) dx \\
& + \int_L^{3L/2} \left(\frac{x}{3} - L\right) \left(\frac{Px}{2} + \frac{PL}{2}\right) dx \\
& + \int_{3L/2}^{5L/2} \left(\frac{x}{3} - L\right) \left(-\frac{Px}{2} + 2PL\right) dx + \int_{5L/2}^{3L} \left(\frac{x}{3} - L\right) \left(-\frac{3Px}{2} + \frac{9PL}{2}\right) dx \left. \right] \\
& + \frac{f_s}{GA} \left[\int_0^{L/2} \left(-\frac{2}{3}\right) \left(\frac{3P}{2}\right) dx \right. \\
& + \int_{L/2}^L \left(-\frac{2}{3}\right) \left(\frac{P}{2}\right) dx \\
& + \int_L^{3L/2} \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{P}{2}\right) dx + \int_{3L/2}^{5L/2} \left(\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{P}{2}\right) dx + \int_{5L/2}^{3L} \left(\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{3P}{2}\right) dx \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\Delta_{10} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{138PL^3}{144} \right] + \frac{f_s}{GA} [-PL] \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{20} = & \frac{1}{EI} \left[\int_0^{L/2} \left(-\frac{x}{3}\right) \left(\frac{3Px}{2}\right) dx \right. \\
& + \int_{L/2}^{3L/2} \left(-\frac{x}{3}\right) \left(\frac{Px}{2} + \frac{PL}{2}\right) dx \\
& + \int_{3L/2}^{2L} \left(-\frac{x}{3}\right) \left(-\frac{Px}{2} + 2PL\right) dx \\
& + \int_{2L}^{5L/2} \left(\frac{2x}{3} - 2L\right) \left(-\frac{Px}{2} + 2PL\right) dx + \int_{5L/2}^{3L} \left(\frac{2x}{3} - 2L\right) \left(-\frac{3Px}{2} + \frac{9PL}{2}\right) dx \left. \right] \\
& + \frac{f_s}{GA} \left[\int_0^{L/2} \left(-\frac{1}{3}\right) \left(\frac{3P}{2}\right) dx \right. \\
& + \int_{L/2}^{3L/2} \left(-\frac{1}{3}\right) \left(\frac{P}{2}\right) dx \\
& + \int_{3L/2}^{2L} \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{P}{2}\right) dx + \int_{2L}^{5L/2} \left(\frac{2}{3}\right) \left(-\frac{P}{2}\right) dx + \int_{5L/2}^{3L} \left(\frac{2}{3}\right) \left(-\frac{3P}{2}\right) dx \left. \right]
\end{aligned}$$



$$\Delta_{20} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{23PL^3}{24} \right] + \frac{f_s}{GA} [-PL] \quad (9)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (4) hallamos las incógnitas X_1 y X_2 mostradas en la ecuación (10)

$$X_1 = X_2 = \frac{PL \left(\frac{23L^2}{EI} + \frac{24f_s}{GA} \right)}{24(C_1 + C_2)} \quad (10)$$

Donde:

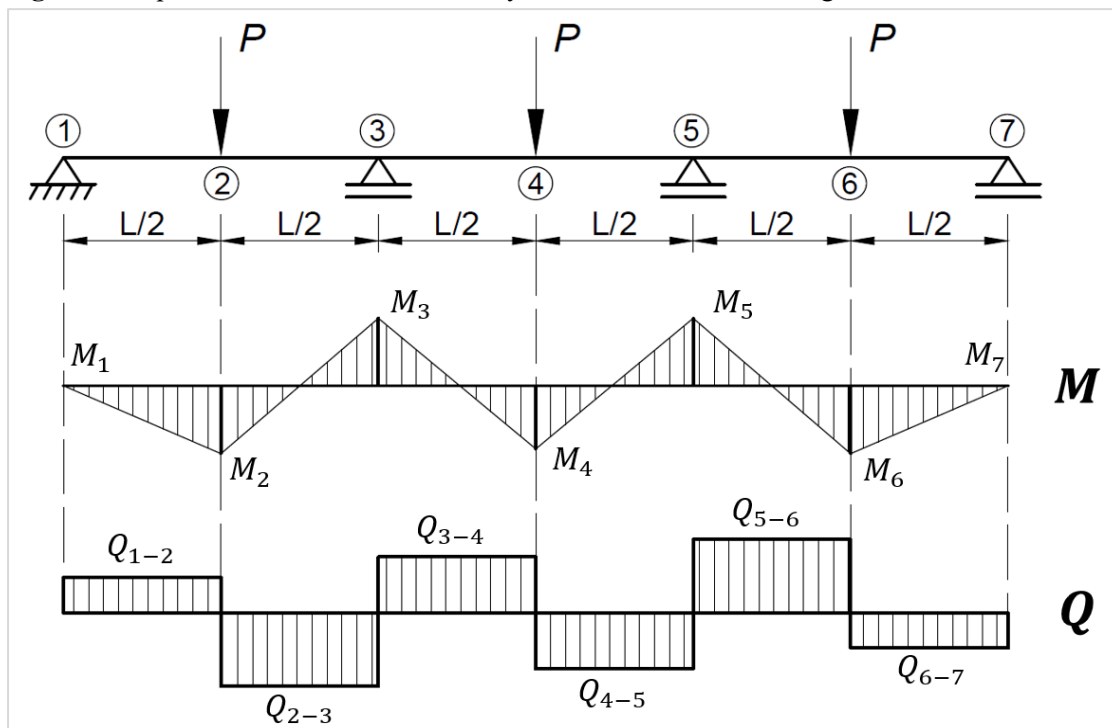
$$C_1 = \frac{4L^3}{9EI} + \frac{2Lf_s}{3GA}$$

$$C_2 = \frac{7L^3}{18EI} + \frac{Lf_s}{3GA}$$

Solicitaciones de la viga hiperestática

La Figura (4) esquematiza las solicitaciones de la viga hiperestática obtenida del análisis previo. Estas incluyen los momentos flectores y las fuerzas cortantes que serán aplicadas a los 3 especímenes en estudio.

Figura 4 Esquema de momentos flectores y fuerzas cortantes en la viga



Nota. Elaboración propia

Los valores de sollicitación en cada tramo de la viga se pueden determinar con las ecuaciones de equilibrio estático. A partir de ese análisis se determinaron expresiones matemáticas que representan las fuerzas internas en cada punto o tramo de la viga y se resumen en la Tabla 3:

Tabla 3 Fuerzas internas de la viga hiperestática

Momentos	Cortantes
$M_1 = 0$	$Q_{1-2} = V_1$
$M_2 = \frac{V_1 L}{2}$	$Q_{2-3} = V_1 - P$
$M_3 = V_1 L - \frac{PL}{2}$	$Q_{3-4} = V_1 - P + X_1$
$M_4 = \frac{3V_1 L}{2} + \frac{X_1 L}{2} - PL$	$Q_{4-5} = V_1 - 2P + X_1$
$M_5 = V_1 L - \frac{PL}{2}$	$Q_{5-6} = V_1 - 2P + 2X_1$
$M_6 = \frac{V_1 L}{2}$	$Q_{6-7} = V_1 - 3P + 2X_1$
$M_7 = 0$	

Las fuerzas internas halladas nos permiten, mediante la incorporación de datos de los 3 especímenes y la variación de la longitud de vanos, calcular un factor de sollicitación considerando y sin considerar la fuerza cortante. Los resultados se presentan a continuación.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se realizó el análisis de la viga hiperestática para los tres especímenes de hormigón armado considerando y sin considerar la fuerza cortante, obteniéndose un factor que relaciona la sollicitación máxima ($Factor = Sollicitación_{con\ cortante} / Sollicitación_{sin\ cortante}$). Los resultados se muestran para el momento flector máximo M y la fuerza cortante máxima Q en las figuras (5), (6) y (7):

Figura 5 Solicitaciones del espécimen I (20x40cm.)

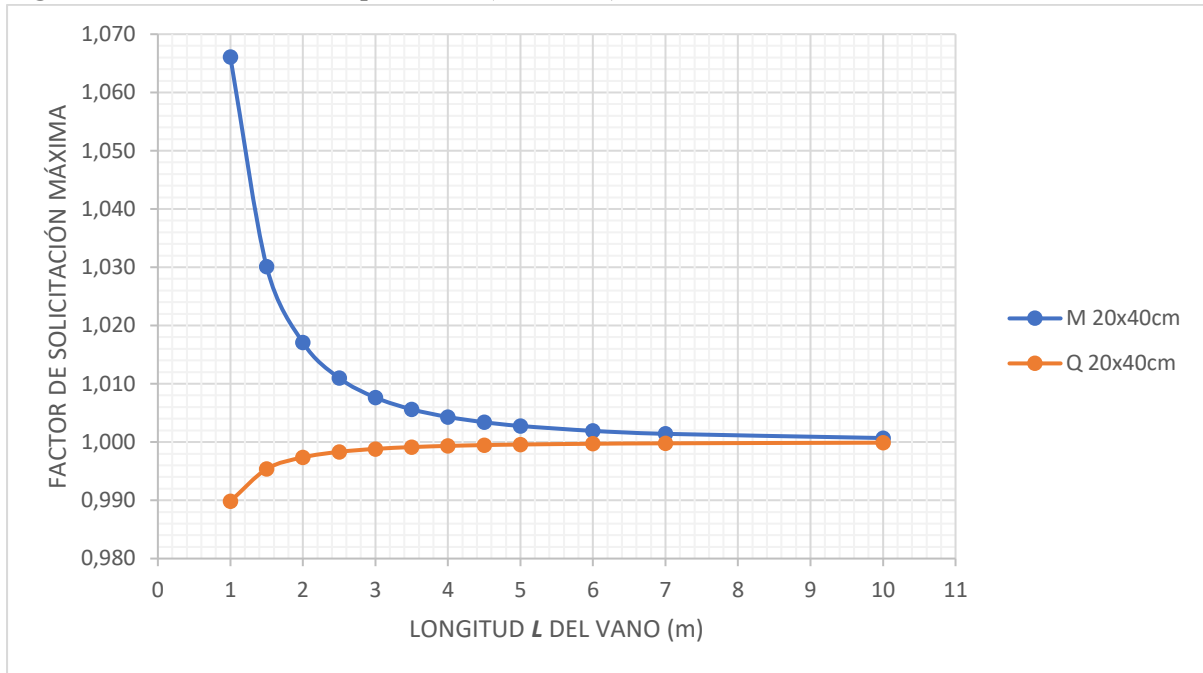


Figura 6 Solicitaciones del espécimen II (25x50cm.)

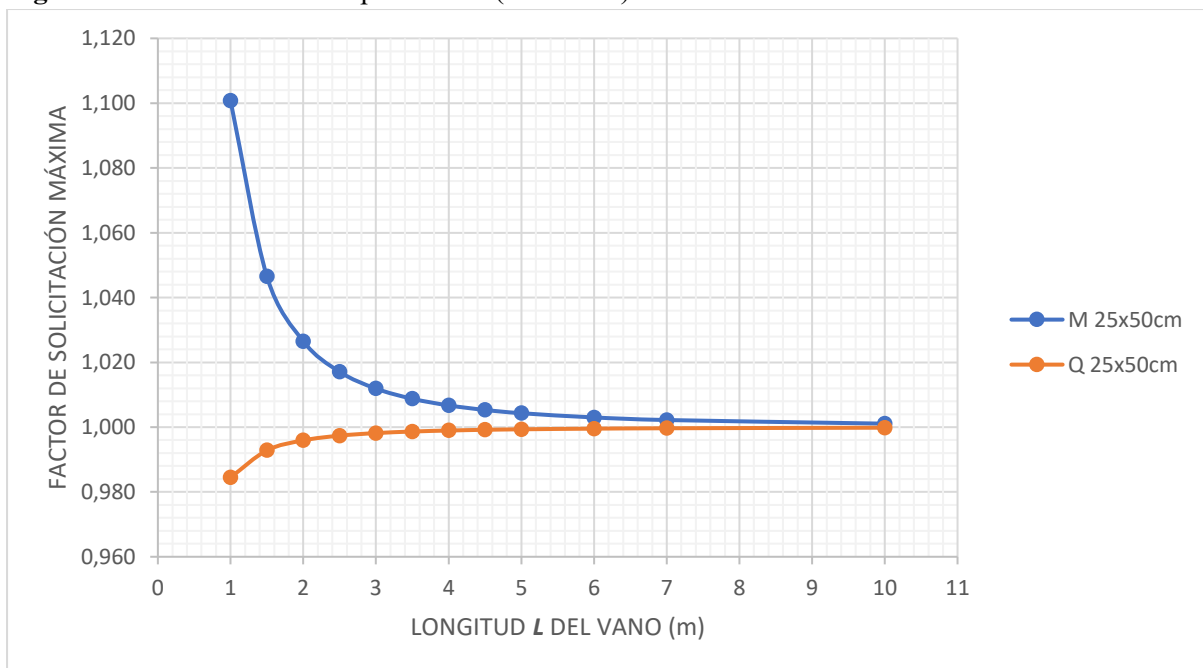
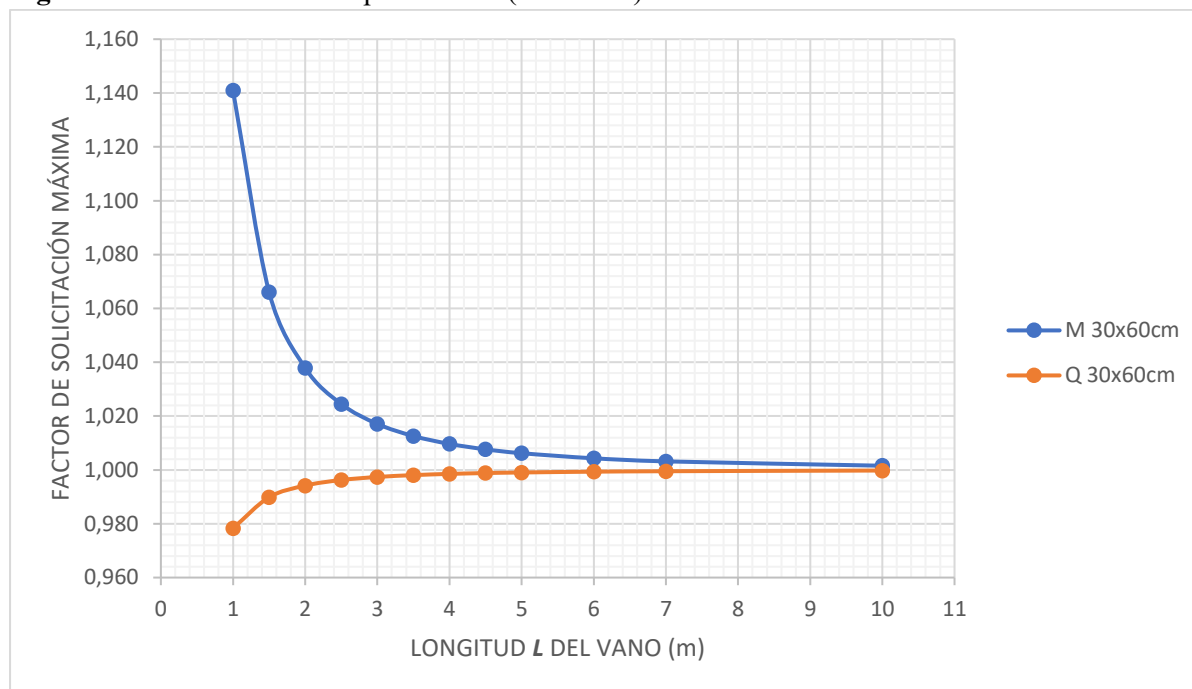


Figura 7 Solicitaciones del espécimen III (30x60cm.)



Como se registra en las Figuras (5), (6) y (7) en las que se aplica el modelo para los tres especímenes (I, II y III) el mayor efecto se aprecia en los momentos flectores (M) donde ocurren incrementos importantes del momento máximo a medida que la longitud del vano disminuye. Los resultados se resumen en la tabla 4:

Tabla 4 Momento máximo considerando y sin considerar el aporte del cortante

L (m)	ESPECIMEN I (20x40cm)			ESPECIMEN II (25x50cm)			ESPECIMEN III (30x60cm)		
	CON ^a	SIN ^b	Factor	CON ^a	SIN ^b	Factor	CON ^a	SIN ^b	Factor
	M _{max} (t*m)	M _{max} (t*m)		M _{max} (t*m)	M _{max} (t*m)		M _{max} (t*m)	M _{max} (t*m)	
1,00	0,107	0,100	1,066	0,110	0,100	1,101	0,114	0,100	1,141
1,50	0,155	0,150	1,030	0,157	0,150	1,047	0,160	0,150	1,066
2,00	0,203	0,200	1,017	0,205	0,200	1,027	0,208	0,200	1,038
2,50	0,253	0,250	1,011	0,254	0,250	1,017	0,256	0,250	1,024
3,00	0,302	0,300	1,008	0,304	0,300	1,012	0,305	0,300	1,017
3,50	0,352	0,350	1,006	0,353	0,350	1,009	0,354	0,350	1,013
4,00	0,402	0,400	1,004	0,403	0,400	1,007	0,404	0,400	1,010
4,50	0,452	0,450	1,003	0,452	0,450	1,005	0,453	0,450	1,008
5,00	0,501	0,500	1,003	0,502	0,500	1,004	0,503	0,500	1,006
6,00	0,601	0,600	1,002	0,602	0,600	1,003	0,603	0,600	1,004
7,00	0,701	0,700	1,001	0,702	0,700	1,002	0,702	0,700	1,003
10,0									
0	1,001	1,000	1,001	1,001	1,000	1,001	1,002	1,000	1,002

(^a) considerando el aporte del cortante en el análisis estructural

(^b) sin considerar el aporte del cortante en el análisis estructural

Según las figuras (5), (6) y (7) una situación muy diferente se aprecia en la fuerza cortante (Q) donde su valor máximo disminuye levemente a medida que la longitud del vano se acorta. Esto hace innecesario un mayor análisis, toda vez que resulta conservador no incluir la deformación por cortante en cualquier diseño posterior.

A partir de toda la metodología de análisis aplicada al modelo propuesto se ha encontrado que mientras mayor sea el momento de inercia de la viga, mayor será la influencia de la deformación por cortante en las fuerzas internas de la viga. Esto se evidencia al observar los resultados de los 3 especímenes en la tabla 4, donde se tiene que el espécimen III arroja los mayores factores de sollicitación F .

La fuerza cortante máxima en vigas hiperestáticas de hormigón disminuye si se consideran las deformaciones debidas al cortante. Esta disminución de fuerza cortante máxima está en el orden del 2% y corresponde al espécimen III para longitudes de vano muy cortas. Al ser un resultado conservador el no considerar las deformaciones por cortante en el análisis, se genera mayor seguridad en el posterior diseño del miembro estructural.

Por otro lado, el mayor incremento del momento flector está en el orden del 14% y corresponde al espécimen III para longitud del vano de 1 metro. Nótese que, en función de los resultados presentados en las figuras (5), (6) y (7), la influencia de las deformaciones por cortante tiende a incrementar los momentos flectores abruptamente para longitudes cortas y disminuir levemente la fuerza cortante. Estos resultados guardan relación con otras investigaciones como las realizadas por Luévanos (2012) quien aplicando el método Pendiente – Deflexión a vigas hiperestáticas de acero encontró comportamientos similares cuando se toman en cuenta las deformaciones por cortante.

La normativa americana para elementos de hormigón estructural ACI 318 indica que el efecto de los desplazamientos en estructuras puede ser ignorado cuando la variación de la respuesta estructural no excede del 5% (Comité ACI 318, 2019). En ese marco, para los 3 especímenes estudiados se observa que en vanos de 2 metros o mayores el incremento en los momentos flectores máximos es inferior al 4%, cayendo dentro del rango mencionado. En otras palabras, si las vigas de un edificio de hormigón tienen longitudes entre apoyos mayores a 2 metros, el efecto de la deformación por cortante en las fuerzas internas es tan pequeño que se puede ignorar.

CONCLUSIONES

El método de las fuerzas, a pesar de ser “clásico”, es un método válido para encontrar las solicitaciones de vigas hiperestáticas incorporando las deformaciones por cortante. El hecho de incluir las deformaciones por cortante en el análisis de vigas continuas de hormigón afecta a sus solicitaciones, especialmente en lo que se refiere al momento flector, encontrándose incrementos importantes de hasta el 14% para vanos de 1 metro. En términos prácticos, si la longitud entre apoyos supera los 2 metros, el efecto de las deformaciones por cortante en las solicitaciones puede ignorarse.

En el caso de la fuerza cortante, la variación tiene un valor conservador y está por debajo del 2% por lo que puede considerarse despreciable su efecto para cualquier longitud de vano.

Este trabajo fue orientado al análisis de vigas de sección transversal típicas en edificios de hormigón, específicamente 3 tamaños o especímenes y se encontró que a medida que aumenta la rigidez, la influencia de la deformación por cortante en las solicitaciones es mayor. Este análisis no es válido para vigas de sección variable y tampoco considera propiedades especiales de la sección transversal como la inercia agrietada o secciones compuestas, que bien podrían ser sujeto de otros trabajos de investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- ACI Committee 318. (2019). *ACI 318-19: Building code requirements for structural concrete*. American Concrete Institute. <https://www.concrete.org>
- Alemán, T. W. (2022). *Estructuras hiperestáticas: Análisis estructural* (1.ª ed.).
- Beer et al. (2010). *Mecánica de materiales*. (5ta Ed.). McGraw Hill.
- Descamps, B. & Filomeno Coelho, R. (2014). The nominal force method for truss geometry and topology optimization incorporating stability considerations. *International Journal of Solids and Structures*. 51. Pp. 2390 – 2399. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.03.003>
- Gere, J., & Goodno, B. (2009). *Mecánica de materiales* (7.ª ed.). Cengage learning editores.
- Gere, J., & Timoshenko, S. (1986). *Mecánica de materiales* (2.ª ed.). Grupo editorial Iberoamérica.
- González et al. (2017). Comparativa del análisis estructural realizado con software Staad y con métodos manuales tradicionales. *RITI Journal*. 5(10). Pp 138-143.
- Hibbeler, R.C. (2012). *Análisis estructural*. (8va Ed.). Pearson Educación.
- Kassimali, A. (2015). *Análisis estructural*. (5ta Ed.). Cengage Learning



- Kaveh, A. et al (2014). New developments in the optimal analysis of regular and near-regular structures: decomposition, graph products, force method. *Acta Mechanica*. 226. Pp. 665 – 681.
<https://www.researchgate.net/publication/271629893>
- Kaveh, A & Ebrahimi, E. (2012). Graph-theoretical force method of finite element models with triangular and rectangular elements. *Asian journal of civil engineering*. 13(5). Pp. 597-616.
- Luévanos, A. (2012). Method of structural analysis for statically indeterminate beams. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 8(8), pp. 5473–5486.
METHOD_OF_STRUCTURAL_ANALYSIS_FOR_STATIC20220415-1-2gny0g.pdf
<http://dlwqtxts1xzle7.cloudfront.net>
- Luévanos, A. (2011). Método de deflexión-pendiente para vigas estáticamente indeterminadas, considerando las deformaciones por cortante. *Revista de Arquitectura e Ingeniería*, 5(2).
- McCormac, J. (2011). *Análisis de estructuras: Métodos clásico y matricial* (4.ª ed.). Marcombo.
- McCormac, J., & Brown, R. (2016). *Design of reinforced concrete* (10.ª ed.). Wiley.
- Prato, C. & Massa, J. C. (2020). *Análisis de estructuras de barras: métodos de las fuerzas*: (1ª ed.). Jorge Sarmiento Editor - Universitas. <https://elibro.net/es/lc/bibliounivalle/titulos/174826>
- Sussekind, J. C. (1980). *Curso de Análise Estrutural: Deformacoes em estruturas. Método das forcas* (4.ª ed.). Globo.
- Wight, J. K., & MacGregor, J. G. (2012). *Reinforced concrete: Mechanics and design* (6.ª ed.). Pearson.

