Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, Ciudad de México, México.
ISSN 2707-2207 / ISSN 2707-2215 (en línea), noviembre-diciembre 2024,
Volumen 8, Número 6.

https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v8i6

DEMOSTRACIÓN DE LA FORMULA DE LA SUMA PARCIAL DE LOS PRIMEROS NÚMEROS NATURALES

DEMONSTRATION OF THE FORMULA FOR THE PARTIAL SUM OF THE FIRST NATURAL NUMBERS

Erik López-García
Tecnológico Nacional de México

Miguel Ángel Chagolla Gaona
Tecnológico Nacional de México

Omar Christian Benítez Centeno
Tecnológico Nacional de México

Alejandro Rojas Ayala
Tecnológico Nacional de México

Enrique de Jesús Moreno Carpintero
Tecnológico Nacional de México

José Ángel Sandoval Erazo
Tecnológico Nacional de México

DOI: https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v8i6.15343

Demostración de la Formula de la Suma Parcial de los Primeros Números Naturales

Erik López-García[1]
eriklg@zacatepec.tecnm.mx
https://orcid.org/0000-0003-2667-6474
Tecnológico Nacional de México
IT de Zacatepec
México

Miguel Ángel Chagolla Gaona
miguel.cg@zacatepec.tecnm.mx
https://orcid.org/0009-0001-0915-487X
Tecnológico Nacional de México
IT de Zacatepec
México

Omar Christian Benítez Centeno
omar.bc@zacatepec.tecnm.mx
https://orcid.org/0000-0002-5756-1912
Tecnológico Nacional de México
IT de Zacatepec
México

Alejandro Rojas Ayala
alejandro.ra@zacatepec.tecnm.mx
https://orcid.org/0000-0003-0403-6169
Tecnológico Nacional de México
IT de Zacatepec
México

Enrique de Jesús Moreno Carpintero
enrique.mc@zacatepec.tecnm.mx
https://orcid.org/0000-0002-5472-1503
Tecnológico Nacional de México
IT de Zacatepec
México

José Ángel Sandoval Erazo
l21090859@zacatepec.tecnm.mx
https://orcid.org/0009-0001-7849-3410
Tecnológico Nacional de México
IT de Zacatepec
México

RESUMEN

El primer tipo de números que invento la humanidad fueron los números naturales $\mathbb{N}$, y dentro de los cuales la operación correspondiente que dio origen a su invención fue la suma, ya que a partir de esta operación cualquier número natural se puede ver como la suma del número natural 1 (por ejemplo $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$). Ahora que pasa si sumamos números naturales consecutivos $1 + 2 + 3 + \cdots + n$, el ejercicio es exhausto hacerlo para números muy grandes (por ejemplo, sumar del 1 al 100), sin embargo, existen fórmulas para este tipo de sumatorias que nos hacen calcular dicha suma de números con solo realizar unas cuantas operaciones. La fórmula de la suma parcial de números naturales consecutivos es la siguiente $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Una de las demostraciones es por el método del principio de inducción matemática, la cual es una demostración directa dado que debes conocer la fórmula a la que quieres llegar. Aun así, existe otra demostración para llegar a esta fórmula de la suma parcial $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, este es por el método de deducción mediante operaciones; en este artículo haremos una demostración de este tipo.

Palabras clave: sumas parciales, series, principio de inducción matemática

[1] Autor principal.
Correspondencia: omar.bc@zacatepec.tecnm.mx

Demonstration of the Formula for the Partial Sum of the First Natural Numbers

ABSTRACT

The first type of numbers invented by humanity were the natural numbers $\mathbb{N}$, within which the corresponding operation leading to their invention was addition. Through this operation, any natural number can be expressed as the sum of the natural number one (for example, $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$). Now, when we sum consecutive natural numbers, such as $1 + 2 + 3 + \cdots + n$, performing this calculation manually becomes exhausting for very large numbers (for example, summing from 1 to 100). However, there are formulas for this type of summation that allow us to compute the sum with just a few operations. The formula for the partial sum of consecutive natural numbers is as follows: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. One way to demonstrate this formula is through the principle of mathematical induction, a direct proof method that requires knowing the formula beforehand. Nevertheless, there exists another method to construct this formula for the partial sum, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, using a deductive approach based on operations. In this article, we will present a demonstration of this type.

Keywords**:** partial sums, series, principle of mathematical induction

Artículo recibido 18 noviembre 2024
Aceptado para publicación: 15 diciembre 2024

INTRODUCCIÓN

¿Qué es una Sucesión de números reales?

Definimos una sucesión de números reales (Spivak, 1967), como una función que va del conjunto de números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ a los números reales $\mathbb{R}$, es decir, $\mathcal{X}: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si $\mathcal{X}$ es una *Sucesión*, el valor de "n" evaluado en la sucesión se denota por $\mathcal{X}(n) := x_n$. A los elementos x_n se les llama elementos de la sucesión (Rudin, 1980). Luego, a la sucesión se va denotar como $\{x_n\}$ o $\{x_n: n_\in \mathbb{N}\}$ o $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (Benavent, 2011).

Ejemplos.

(1) Veamos la sucesión identidad de los números naturales, $\{x_n\} = \{n: n_\in \mathbb{N}\}$, es decir, es la que consta de la siguiente lista

$\{x_n\} = \{1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots\}$.

(2) La sucesión cuadrática de los números naturales, viene dada por $\{x_n\} = \{n^2: n_\in \mathbb{N}\}$, es decir, es la que consta de la siguiente lista

$\{x_n\} = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \cdots, n^2, \cdots\} = \{1, 4, 9, 16, \cdots, n^2, \cdots\}$.

(3) La sucesión de la raíz cuadrada de los números naturales (Burgos, 2006), viene dada por $\{x_n\} = \{\sqrt{n}: n_\in \mathbb{N}\}$, es decir, la que consta de la siguiente lista

$\{x_n\} = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \cdots, \sqrt{n}, \cdots\} = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \cdots, \sqrt{n}, \cdots\}$.

¿Qué es una Serie generada por una sucesión de números reales?

Definimos una *Serie* de una sucesión de números reales $\{x_n\}$ o simplemente la serie infinita (Black, 2021), como la sucesión $S \coloneqq \{s_k\}$ donde

$s_1 \coloneqq x_1$

$s_2 \coloneqq x_1 + x_2$

$\vdots$

$s_k := x_1 + x_2 + \cdots + x_k$

$\vdots$

A los números x_n se les llama los *Términos* de la serie (Apostol, 2007).

Ejemplos.

(1) Veamos la serie de la sucesión identidad de los números naturales

$\{x_n\} = \{n : n_{\in}\mathbb{N}\}$. Su serie viene dada por:

$S = \{1, 1+2, 1+2+3, \cdots, 1+2+3+\cdots+n, \cdots\}$

o

$S = \{\, 1+2+3+\cdots+n\}$

(2) Esta es la serie de la sucesión cuadrática de los números naturales $\{x_n\} = \{n^2 : n_{\in}\mathbb{N}\}$, (Casteleiro, 2007). Su serie viene dada de la siguiente forma:

$S = \{1^2, 1^2+2^2, 1^2+2^2+3^2, \cdots, 1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2, \cdots\}$

o

$S = \{1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2\}$

(3) La serie de la sucesión de la raíz cuadrada de los números naturales $\{x_n\} = \{\sqrt{n} : n_{\in}\mathbb{N}\}$, viene dada como sigue:

$S = \{\sqrt{1}, \sqrt{1}+\sqrt{2}, \sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}, \cdots, \sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\cdots+\sqrt{n}, \cdots\}$

o

$S = \{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\cdots+\sqrt{n}+\cdots\}$

¿Qué es una Suma Parcial de una serie?

Sea $S = \{s_k\}$ una serie de una sucesión de números reales $\{x_n\}$, entonces definimos a los números s_k como *Sumas Parciales* de la serie (Hardy et al, 2008).

Es conveniente usar símbolos para las sumas parciales de la serie como

$$s_1 = \sum_{n=1}^{1} x_n$$

$$s_2 = \sum_{n=1}^{2} x_n$$

$$\vdots$$

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} x_n.$$

De esta forma (Swokowski, 1983), la serie queda simbolizada de la siguiente manera

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

Ejemplos.

(1) En la serie de la sucesión identidad de los números naturales

$\{x_n\} = \{n : n_{\in}\mathbb{N}\}$, su serie viene dada por:

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\,.$$

es decir,

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots$$

La suma parcial de los n primeros términos (Plans, 1924), viene dada por lo siguiente

$$\sum_{i=1}^{n} i.$$

(2) En la serie de la sucesión cuadrática de los números naturales $\{x_n\} = \{n^2 : n_{\in}\mathbb{N}\}$, (Rivera, 2014), su serie viene dada de la siguiente forma:

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^2\,.$$

O también,

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 + \cdots$$

La suma parcial de los n primeros términos, viene dada por lo siguiente

$$\sum_{j=1}^{n} j^2.$$

(3) La serie de la sucesión de la raíz cuadrada de los números naturales $\{x_n\} = \left\{\sqrt{n} : n_{\in}\mathbb{N}\right\}$, viene dada como sigue:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k}\,.$$

Es decir,

$$S = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \cdots + \sqrt{n} + \cdots$$

La suma parcial de los n primeros términos, viene dada por lo siguiente

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\,.$$

¿Fórmulas de sumas parciales?

A continuación, daremos algunos ejemplos de las fórmulas que se tienen para diferentes Sumas Parciales (Ruiz, 2000), veamos.

Ejemplos.

(1) La fórmula para la $n-ésima$ suma parcial de la serie $\sum_{i=1}^{\infty} i$,(Zill et al, 2018) viene dada por

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(2) La fórmula para la $n-ésima$ suma parcial de la serie$\sum_{j=1}^{n} j^2$, es la siguiente

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(3) La fórmula para la $n-ésima$ suma parcial de la serie$\sum_{j=1}^{n} j^3$, es la siguiente

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Para la demostración de este tipo de fórmulas, se pueden hacer de dos formas, la primera de ellas es por el *Principio de Inducción Matemática* (Larson et al, 2017) y la segunda es por *Deducción* mediante operaciones (Hazewinkel, M. 2001). En este artículo nos enfocaremos en demostrar la formula $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ mediante el método directo.

METODOLOGÍA

Método del Principio de Inducción Matemática

Una de las propiedades importantes en los números naturales $\mathbb{N}$ es el principio de Inducción Matemática, veamos en que consiste.

Supongamos que $p(x)$ significa que el número x cumple con la propiedad p, entonces el principio de inducción matemática afirma que la propiedad p es verdad para los números naturales $\mathbb{N}$ si se cumple las siguientes condiciones:

(1) Que $p(1)$ se cumpla.

(2) Si $p(n)$ es verdad, entonces se cumple para $p(n+1)$.

Veamos la demostración de la fórmula de la suma parcial de los primeros números naturales, entiéndase que se tiene como hipótesis la fórmula de la suma parcial citada.

TEOREMA. La suma parcial de los primeros números naturales consecutivos es

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demostración.

Veamos si se cumple las condiciones del principio de inducción matemática.

(1) ¿Se cumple la fórmula de la sumatoria si $n = 1$, es decir, $\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2}$?

En efecto, si se cumple, porque al simplificar tenemos la igualdad en ambos miembros de la ecuación (dado que $\sum_{i=1}^{1} i = 1$), véase lo siguiente

$$\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2} \longrightarrow 1 = \frac{1(2)}{2} \longrightarrow 1 = \frac{2}{2} \longrightarrow 1 = 1.$$

(2) Supongamos que la fórmula es verdadera para algún número natural "n", es decir, se cumple la siguiente ecuación.

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \cdots Ec.(1)$$

Ahora, vamos a demostrar que se cumple la fórmula para el siguiente número natural, que es $n+1$, es decir, que se cumpla la siguiente igualdad

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$$

De manera simplificada, la ecuación anterior se vería como

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \cdots Ec.(2)$$

Primero, la sumatoria $\sum_{i=1}^{n+1} i$, la podemos ver como la sumatoria hasta el numero anterior "n" y sumarle el siguiente número "$n+1$", es decir

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1)$$

De aquí podemos sustituir la equivalencia de la sumatoria $\sum_{i=1}^{n} i$ que nos dice la ecuación (1)

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

Y ahora, simplificando y factorizando "$n+1$" tenemos que llegamos a la ecuación 2.

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Entonces, la fórmula de la sumatoria es correcta para "$n+1$"; por lo tanto, esto demuestra que la fórmula de la sumatoria es válida para todos los números $\mathbb{N}$. ■

Método por Deducción

Lo que emplearemos para demostrar el teorema citado, es por deducción, es decir, empleamos operaciones y las mismas ecuaciones para llegar a la fórmula de la sumatoria.

Veamos la siguiente demostración del teorema donde lo hace por deducción.

TEOREMA. La suma parcial de los primeros números naturales consecutivos es

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demostración.

Primero hacemos la suma directa *escribiéndola* la suma dos veces, una normal y otra invertida.

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1$$

Sumamos las dos expresiones, al sumar cada termino correspondiente expresión por expresión, nos queda de la manera siguiente.

$$2\sum_{i=1}^{n} i = (1+n) + (2+n-1) + (3+n-2)) + \cdots + (n-2+3) + (n-1+2) + (n+1)$$

$$2\sum_{i=1}^{n} i = (1+n) + (1+n) + (1+n) + \cdots + (n+1) + (n+1) + (n+1)$$

$$2\sum_{i=1}^{n} i = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1) + (n+1)$$

Cada par de términos suma $n+1$, y hay n términos, por lo tanto

$$2\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)$$

Ahora despejamos S_n y tenemos la formula a la que queremos llegar

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \blacksquare$$

A partir de lo visto anteriormente, utilizaremos esta metodología de deducción mediante operaciones para realizar una demostración distinta del mismo teorema, lo cual consideramos importante para tener diferentes formas de llegar al mismo resultado desde diferentes perspectivas.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Demostraremos el Teorema ocupando el mismo método de deducción, que es de alguna forma más lógica. El razonamiento de la demostración, se basa en el ejemplo del matemático Gauss en el que resolvió de forma rápida el encontrar la suma de los primeros números naturales hasta llegar al 100; veamos como lo hacemos.

TEOREMA. La suma parcial de los primeros números naturales consecutivos es

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demostración

Sabemos que la suma del teorema la podemos expresar de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \qquad \cdots ec. (1)$$

Como el numero natural n puede ser par o impar, entonces dividimos en dos casos la demostración.

I CASO. Si n es par, es decir, $n = 2k$ para un $k \in \mathbb{N}$, entonces el numero $k = \frac{n}{2}$ divide a la suma en dos sumatorias con el mismo número de elementos

$$1+2+3+\cdots+\frac{n}{2} \qquad \cdots ec.(2)$$

$$\left(\frac{n}{2}+1\right)+\cdots+(n-2)+(n-1)+n \qquad \cdots ec.(3).$$

Así la suma quedaría expresada de la siguiente forma.

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\cdots+\frac{n}{2}+\left(\frac{n}{2}+1\right)+\cdots+(n-2)+(n-1)+n \qquad \cdots ec.(4)$$

Ahora, a la suma del segundo miembro le vamos hacer el siguiente arreglo, sumamos los elementos de la sumatoria con ecuación (2) con los sumandos de la sumatoria con ecuación (3) como sigue:

el primer elemento de la ecuación (2) con el ultimo sumando de la ecuación 3 (el cual queda "$(1+n)$"), luego el segundo elemento con el penúltimo sumando (quedando "$(2+n-1)$"), el tercer elemento con el antepenúltimo sumando (queda "$(3+n-2)$" y así sucesivamente. Al final nos queda la suma

$$\sum_{i=1}^{n} i = (1+n)+(2+n-1)+(3+n-2)+\cdots+\left(\frac{n}{2}-1+\frac{n}{2}+2\right)+\left(\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+1\right)$$

$$= (1+n)+(1+n)+(1+n)+\cdots+(1+n)+(1+n)$$

Como notamos, el término "$(1+n)$" se repite $\frac{n}{2}$ -veces, entonces la sumatoria se quedaría

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}(1+n).$$

La cual es el resultado de la fórmula a la que queríamos llegar.

II CASO. Si n es impar, es decir, $n=2k+1$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces el numero $k+1=\frac{n+1}{2}$ divide en dos sumatorias a la suma original, donde el número de elementos de cada sumatoria es el mismo $k=\frac{n-1}{2}$ cada una y quedando fuera de las sumatorias el elemento con número $k+1$.

$$1+2+3+\cdots+\frac{n-3}{2}+\frac{n-1}{2}, \qquad \cdots ec.(5)$$

$$\frac{n+1}{2},$$

$$\frac{n+3}{2}+\frac{n+5}{2}+\cdots+(n-2)+(n-1)+n \qquad \cdots ec.(6).$$

Así, la suma queda expresada de la siguiente forma

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\cdots+\frac{n-3}{2}+\frac{n-1}{2}+\frac{n+1}{2}+\frac{n+3}{2}+\frac{n+5}{2}+\cdots+(n-2)+(n-1)+n.$$

Ahora, en la suma del segundo miembro haremos el siguiente arreglo, movemos al final el elemento $k+1=\frac{n+1}{2}$ y sumamos los elementos de la sumatoria con ecuación (5) con los sumandos de la sumatoria con ecuación (6) de la manera siguiente: El primer elemento de la ecuación (5) con el ultimo de la ecuación (6) (el cual queda "$(1+n)$"), el segundo elemento con el penúltimo (quedando "$(2+n-1)$"), el tercer elemento con el antepenúltimo (donde queda "$(3+n-2)$") y así sucesivamente. De esta forma, la suma será

$$\sum_{i=1}^{n} i = (1+n)+(2+n-1)+(3+n-2)+\cdots+\left(\frac{n-3}{2}+\frac{n+5}{2}\right)+\left(\frac{n-1}{2}+\frac{n+3}{2}\right)+\frac{n+1}{2},$$

$$= (1+n)+(1+n)+(1+n)+\cdots+\left(\frac{2+2n}{2}\right)+\left(\frac{2+2n}{2}\right)+\frac{n+1}{2}$$

$$= (1+n)+(1+n)+(1+n)+\cdots+(1+n)+(1+n)+\frac{n+1}{2}.$$

Como notamos, el término "$1+n$" se repite k-veces (donde $k=\frac{n-1}{2}$), entonces la suma queda

$$\sum_{i=1}^{n} i = k(1+n)+\frac{n+1}{2}$$

$$= \left(\frac{n-1}{2}\right)(1+n)+\frac{n+1}{2}$$

$$= \frac{(1+n)[(n-1)+1]}{2}$$

$$= \frac{(1+n)[n]}{2}.$$

Y llegamos al resultado de la fórmula que queríamos demostrar. ■

Notamos, que, al realizar la demostración del Teorema mediante el método deductivo, nos encontramos con un camino más largo, engorroso, con muchas operaciones, pero que, a final de cuentas, no partimos del hecho de conocer ya la formula, porque no siempre la sabemos y a través de este método, tenemos la ventaja de que podemos llegar a la formula.

Quizás en un momento dado al utilizar el método descrito en las demostraciones, llegamos a generalizarlo para descubrir de forma general las fórmulas para las sumatorias de potencias impares.

CONCLUSIONES

Es importante el considerar las fórmulas de las sumas parciales, dado que son el inicio de temas fundamentales como las Series, Límites, las integrales etc.

Observamos, que para el método de inducción matemática se tienen que tener la formula a donde queremos llegar. Una vez que se tiene la formula, es de manera sencilla (comparado con el método deductivo) obtener la demostración para verificar que se cumple está para todos los números naturales, también se dice que es un método directo por la simplicidad. Pero, como lo explicamos, tiene la desventaja de que se necesita la fórmula para emplear dicho método.

Por medio de diferentes caminos, se llegó al mismo resultado, como lo observamos al demostrar la fórmula de la sumatoria parcial de la secuencia de los números naturales.

Es importante, tener diferentes formas de demostrar una formula, porque algunas veces se pueden dar equivalencia en definiciones, también encontrar diferentes características o propiedades que están conllevan. En este caso se puede tener conjeturas, donde por medio del mismo desarrollo de la demostración del teorema, nos lleva a demostrar la fórmula para la sumatoria parcial donde la secuencia es de los números naturales elevados al cubo o también, de potencias impares.

Ahora, nos queda seguir trabajando para poder demostrar el resto de fórmulas de una determinada potencia, ya sea par (por ejemplo, $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2$) o impar (por ejemplo, $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3$), y esto por medio del método deductivo, ya que es con el que estuvimos trabajando; además de que podemos con este método conocer de manera directa la formula.

Algo que también podemos pensar en aplicar este tipo de demostraciones, es de generalizar dicha demostración en conceptos más grandes como son series numéricas o algebraicas y quizás nos ayuden a comprender o dar equivalencias del mismo concepto.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Apostol, T. M. (2007). Calculus: Vol. 1: One-variable calculus with an introduction to linear algebra (2.ª ed.). Wiley.

Benavent, R. (2011). Teoría y problemas de análisis matemático. Ediciones Paraninfo.

Black, L. (2021). Introducción al análisis matemático de una variable Robert G. Bartle Donald R. Sherbert 3a ed. https://www.academia.edu/49923645/Introducci%C3%B3n_al_an%C3%A1lisis_matem%C3%A1tico_de_una_variable_Robert_G_Bartle_Donald_R_Sherbert_3a_ed

Burgos, J. (2006). Análisis matemático I (de una variable real) 100 problemas útiles. García Maroto Editores.

Casteleiro, J. (2007). Introducción al ánalisis matemático II: cálculo diferencial de varias variables. Esic Editorial

Hardy, G. H., & Wright, E. M. (2008). An introduction to the theory of numbers (6.ª ed.). Oxford University Press.

Hazewinkel, M. (2001), «Series», Encyclopaedia of Mathematics (en inglés), Springer.

Larson, R., & Edwards, B. H. (2017). *Calculus of a Single Variable*. Cengage Learning.

Plans, J. (1924). Nociones de cálculo diferencial absoluto y sus aplicaciones. Talleres Voluntad.

Rivera, F. (2014). Cálculo Integral: Sucesiones y Series de Funciones. Grupo Editorial Patria.

Rudin, W. (1980). Principios de Análisis Matemático (3ª edición). McGraw Hill.

Ruiz, J. (2000). Matemáticas 1 Álgebra en acción Tomo 1. Grupo Editorial Patria.

Spivak, M. (1967). Calculus (en inglés) (World student series edición). Addison Wesley.

Swokowski, Earl W. (1983), Calculus with analytic geometry (Alternate edición), Boston: Prindle, Weber & Schmidt, ISBN 978-0-87150-341-1.

Zill, D. G., & Dewar, S. (2018). *Precalculus with Calculus Previews*. Jones & Bartlett Learning.