



Ciencia Latina
Internacional

Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, Ciudad de México, México.
ISSN 2707-2207 / ISSN 2707-2215 (en línea), noviembre-diciembre 2024,
Volumen 8, Número 6.

https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v8i6

**COMPARACIÓN ENTRE MÉTODOS
TRADICIONALES Y EL USO DE GEOGEBRA EN
LA ENSEÑANZA DEL PENSAMIENTO
VARIACIONAL**

**COMPARISON BETWEEN TRADITIONAL METHODS AND THE
USE OF GEOGEBRA IN TEACHING VARIATIONAL THINKING**

Claudia Patricia Solís Lemus
Universidad San Buenaventura Cali-Colombia

Gustavo Montealegre Lynett
Universidad San Buenaventura Cali-Colombia

DOI: https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v8i6.15908

Comparación entre Métodos Tradicionales y el Uso de Geogebra en la Enseñanza del Pensamiento Variacional

Claudia Patricia Solís Lemus¹

clapsolem@gmail.com

<https://orcid.org/0009-0007-6042-6205>

Universidad San Buenaventura Cali
Colombia

Gustavo Montealegre Lynett

monteal9@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0001-5274-6742>

Universidad San Buenaventura Cali
Colombia

RESUMEN

El pensamiento variacional es fundamental para las matemáticas, ya que permite a los estudiantes crear modelos que les ayudan a resolver problemas cotidianos. Su comprensión desde los primeros grados escolares es crucial, pues establece las bases para acceder a conceptos matemáticos más complejos en niveles educativos superiores. Esta investigación tuvo como propósito analizar la comprensión del pensamiento variacional en estudiantes de quinto, considerando los niveles de comprensión según la teoría de Pirie y Kieren y la génesis instrumental de Rabardel. Para ello, se implementó un diseño metodológico mixto: un enfoque cuantitativo mediante un estudio cuasiexperimental y un enfoque cualitativo a través de estudios de casos. En el estudio cuasiexperimental, se utilizó el software GeoGebra como mediador del aprendizaje en el grupo experimental, mientras que el grupo de control resolvió los problemas utilizando herramientas tradicionales. Como hallazgos generales, se evidenció que los estudiantes del grupo experimental avanzaron hasta el nivel 5 del modelo, demostrando un mejor desempeño en los descriptores de comprensión en comparación con el grupo de control. Asimismo, el análisis cualitativo reveló que la actividad instrumentada facilitó una comprensión más profunda de la variación y el cambio en el grupo experimental.

Palabras clave: genesis instrumental, teoria pirie y kieren, comprensión, geogebra y pensamiento variacional

¹ Autor principal.

Correspondencia: clapsolem@gmail.com

Comparison Between Traditional Methods and the Use of Geogebra in Teaching Variational Thinking

ABSTRACT

Variational thinking is essential for the development of mathematical reasoning, as it allows students to create models that help them solve everyday problems. Its understanding from the first school grades is crucial, as it establishes the foundations for accessing more complex mathematical concepts at higher educational levels. The purpose of this research was to analyze the understanding of variational thinking in fifth grade students, considering the levels of understanding according to the theory of Pirie and Kieren and the processes of instrumentalization and instrumentation described in Rabardel's theory of instrumental genesis. To achieve this, a mixed methodological design was implemented: a quantitative approach through a quasi-experimental study and a qualitative approach through case studies. In the quasi-experimental study, GeoGebra software was used as a learning mediator in the experimental group, while the control group solved the problems using traditional tools. As general findings, it was evident that the students in the experimental group advanced to level 5 of the Pirie and Kieren model, demonstrating better performance in the comprehension descriptors compared to the control group. Likewise, qualitative analysis revealed that the instrumented activity facilitated a deeper understanding of variation and change in the experimental group.

Keywords: genesis instrumental, pirie and kieren theory, comprehension, geogebra and variational thinking

*Artículo recibido 29 octubre 2024
Aceptado para publicación: 30 noviembre 2024*



INTRODUCCIÓN

Este artículo explora la comparación entre los métodos tradicionales y el uso de GeoGebra en la enseñanza del pensamiento variacional en estudiantes de quinto grado de educación primaria. En particular, analiza cómo las herramientas digitales como GeoGebra influyen en el desarrollo de la comprensión del pensamiento variacional, en contraste con los métodos tradicionales basados en lápiz y papel.

A pesar de que los métodos tradicionales han sido ampliamente utilizados en la enseñanza de conceptos matemáticos, persisten desafíos significativos para lograr una comprensión profunda del pensamiento variacional en estudiantes de educación primaria. Existe un vacío en la literatura sobre cómo herramientas digitales, específicamente GeoGebra, pueden transformar los niveles de comprensión del pensamiento variacional y facilitar un aprendizaje más significativo. Este estudio busca abordar dicho vacío mediante una comparación directa entre ambos enfoques, con el objetivo principal de evaluar y comparar la efectividad de GeoGebra y los métodos tradicionales en el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de educación primaria.

El pensamiento variacional constituye un pilar fundamental para el razonamiento matemático y científico, ya que sienta las bases para la comprensión de conceptos como el cambio, la variación y el modelado matemático. Según los resultados de la prueba Evaluar para Avanzar, aplicada en el año 2023 por la Secretaría de Educación de Tuluá, los estudiantes al finalizar el ciclo de educación primaria presentan dificultades específicas en el desarrollo del pensamiento aleatorio y numérico-variacional. En particular, se evidenciaron deficiencias en:

- Explicar las características y propiedades de secuencias y expresiones numéricas.
- Resolver problemas de medición que requieran el uso de patrones.
- Analizar datos representados en diferentes formas.

En respuesta a estos hallazgos, se diseñó una estrategia didáctica basada en la integración de herramientas tecnológicas como GeoGebra. Estas herramientas han demostrado potencial para mejorar la comprensión matemática; sin embargo, aún se necesita evidencia empírica que respalde su efectividad en el contexto de la educación primaria. Este artículo ofrece una contribución valiosa al



evaluar y comparar los enfoques tradicionales y tecnológicos para la enseñanza del pensamiento variacional con el objetivo de determinar cuales son los aspectos de los software de geometria dinamica que facilitan la comprensión del pensamiento variacional en estudiantes de quinto grado.

La comprensión matemática, según Pirie y Kieren (1994), es un proceso progresivo que involucra transiciones entre niveles, comenzando desde los saberes previos hasta llegar a niveles más formales de conceptualización. Este proceso se complementa con el marco teórico de la Génesis Instrumental de Rabardel (1995), que distingue entre la instrumentalización, donde el estudiante adapta una herramienta, y la instrumentación, donde la utiliza de manera funcional en tareas matemáticas. Estas teorías son esenciales para analizar cómo los estudiantes desarrollan su pensamiento variacional, especialmente cuando utilizan GeoGebra como una herramienta de aprendizaje.

Estudios previos han destacado la capacidad de las herramientas digitales para facilitar la visualización de conceptos abstractos. Por ejemplo, Arrieta (2003), Vasco (2006), Lopez (2012) y Hernández (2021) subrayan que los entornos digitales favorecen la transición entre diferentes representaciones y niveles de comprensión matemática. Sin embargo, pocos trabajos han enfocado su análisis en el pensamiento variacional en educación primaria. Este artículo contribuye a llenar ese vacío al proporcionar un análisis empírico detallado sobre cómo GeoGebra influye en los niveles de comprensión matemática, según el modelo de Pirie y Kieren.

La presente investigación busca que los estudiantes avancen en su comprensión del pensamiento variacional a través de los niveles del Modelo Instrumental de la Comprensión Variacional, desarrollado como producto de esta investigación doctoral. Este modelo combina los principios de la teoría de la evolución de la comprensión matemática y la génesis instrumental, estableciendo descriptores que permiten diseñar y evaluar estrategias didácticas efectivas.

La investigación se realizó en una institución oficial colombiana con estudiantes de quinto grado de primaria. Este contexto, caracterizado por recursos tecnológicos limitados y un predominio de métodos tradicionales, hace que los resultados sean particularmente relevantes para instituciones similares, donde la implementación de herramientas digitales tiene el potencial de transformar las prácticas de enseñanza. La hipótesis central de este estudio es que el uso de GeoGebra mejora significativamente la comprensión del pensamiento variacional en comparación con los métodos tradicionales.



En conclusión, este artículo busca ofrecer una perspectiva comparativa que permita a los educadores y docentes investigadores evaluar las ventajas y limitaciones del uso del software de geometría dinámica frente a los métodos tradicionales, proporcionando un marco para la implementación de estrategias didácticas que potencien el aprendizaje matemático en educación primaria.

Pensamiento variacional

Según Vasco (2006, p. 138), el pensamiento variacional es “una representación de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades”. Por su parte, el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2004) señala que “no es posible dejar de lado los otros pensamientos cuando se estudian situaciones de variación y cambio” (p. 22). Por lo tanto, este pensamiento es transversal a los demás pensamientos y no se puede desarrollar de forma aislada.

En esta investigación, el pensamiento variacional se entiende como una habilidad fundamental para comprender y dar sentido a los cambios y variaciones presentes en los fenómenos cotidianos. Este concepto se enriquece al integrar la definición de comprensión de Pirie y Kieren, incorporada al Modelo Instrumental de la Comprensión Variacional propuesto. Este modelo plantea que el pensamiento variacional se desarrolla progresivamente a través de niveles, los cuales permiten estudiar fenómenos de cambio y variación mediante el uso de herramientas como mediadores del aprendizaje. Para analizar esta comprensión, se emplearon los referentes teóricos que se describen a continuación.

Referentes teóricos

El marco teórico combina las siguientes perspectivas clave:

Constructivismo en la educación matemática: La teoría constructivista en educación matemática ha experimentado una evolución dinámica desde sus inicios. En la década de 1950, el constructivismo piagetiano estableció las bases al proponer que el conocimiento matemático se desarrolla a través de la interacción activa del estudiante con su entorno. En los años 1970, el constructivismo sociohistórico de Lev Vygotsky enriqueció esta teoría al introducir el elemento del contexto social y cultural en el proceso de aprendizaje matemático. Más tarde, en la década de 1980, el constructivismo radical, formulado por Ernst Von Glasersfeld, desafió las nociones convencionales al afirmar que el conocimiento es una construcción mental subjetiva y que no existe un acceso directo a la realidad externa.



A medida que avanzaba hacia los años 1990, el constructivismo social emergió como una síntesis poderosa, integrando las perspectivas cognitivas y socioconstructivistas. Esta visión reconoce la importancia tanto de las estructuras mentales individuales como de la interacción social en el proceso de aprendizaje matemático. En la época contemporánea, el constructivismo basado en la tecnología ha cobrado relevancia, explorando cómo las tecnologías de la información y la comunicación pueden actuar como facilitadores para la construcción activa del conocimiento matemático.

Esta trayectoria evolutiva demuestra la diversidad y la adaptabilidad del constructivismo en respuesta a los avances tecnológicos y las cambiantes necesidades educativas, estableciendo así una base sólida para la enseñanza y el aprendizaje matemático en el siglo XXI. En este punto es de vital importancia contar con teorías matemáticas constructivistas que permitan analizar cómo un software de matemática dinámica afecta el desarrollo de habilidades matemáticas en niños y adolescentes, a la vez que permite para explorar cómo las variables: práctica, retroalimentación y la motivación afectan la adquisición de conocimientos matemáticos.

Por consiguiente, si que quiere determinar investigar como potenciar el pensamiento variacional en estudiantes de básica primaria es necesario utilizar herramientas didácticas que faciliten que el estudiante pueda interactuar con el entorno, en este punto sobresale el software Geogebra por las facilidades que brinda para crear estrategias de intervención efectivas para el aprendizaje de las matemáticas, pero es necesario tener en cuenta referentes teóricos que permitan mejorar la comprensión matemática.

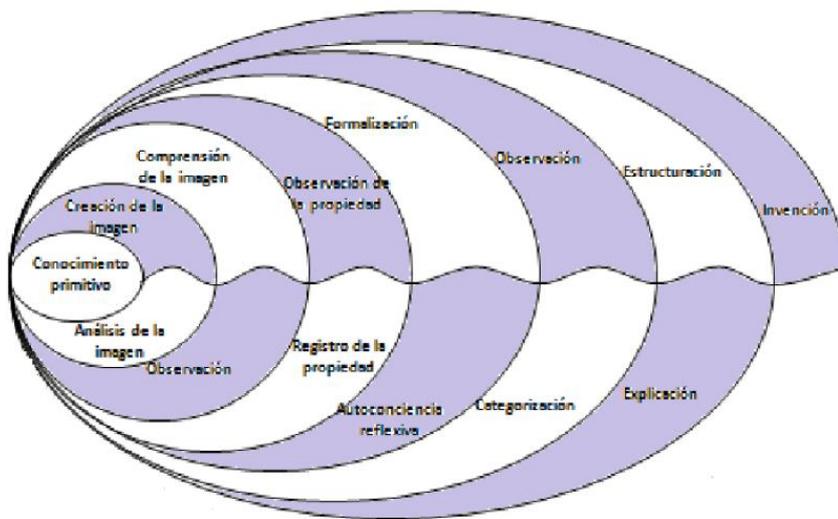
Teoría de la Evolución de la Comprensión Matemática de Pirie y Kieren, desarrollada en el año 1989, fundamentada en el trabajo del francés Jean Piaget pionero en el campo de la psicología del desarrollo y es conocido por su teoría del desarrollo cognitivo, que describe cómo los niños desarrollan el pensamiento lógico y abstracto a medida que crecen.

Pirie y Kieren tomaron las ideas de Piaget y las aplicaron específicamente al aprendizaje matemático, en un principio la teoría se fundamentaba en la observación y comprensión de las matemáticas en los niveles de básica secundaria e universitarios. Su teoría se basa en la idea de que los estudiantes pasan por etapas predecibles en su comprensión matemática a medida que se desarrollan cognitivamente, en un principio el énfasis se encontraba en identificar los patrones en los errores de los estudiantes. Estas



etapas no están vinculadas a la edad cronológica, sino más bien al nivel de desarrollo cognitivo del estudiante. Desde su origen esta teoría ha evolucionado y se ha adaptado para reflejar una comprensión más profunda del proceso de aprendizaje matemático. Esta teoría abarca 8 niveles por los cuales el estudiante debe transitar para lograr la comprensión de un objeto matemático, a su vez cada nivel contiene acciones de complementariedad que le permiten al docente identificar las acciones y expresiones propias de cada nivel que son necesarias para que el estudiante pase al siguiente nivel, la figura 1, contiene las acciones y expresiones de cada nivel.

Figura 1. Acciones de complementariedad para cada nivel de la Teoría Pirie y Kieren



Nota: Londoño (2011, p. 29). En la parte superior de la figura se encuentran los niveles de la Teoría Pirie y Kieren y en la parte inferior las acciones de complementariedad de cada estrato.

Desde su creación esta teoría se integró con la evolución de la comprensión matemática, permitiendo la creación de estrategias didácticas y/o pedagógicas que apoyan el desarrollo matemático en línea con las fases de esta teoría, así mismo es una herramienta valiosa para educadores que ha influido en la forma en que se enseña y se aprende matemáticas en todo el mundo. La adaptación continua de esta teoría a los avances tecnológicos y a las necesidades educativas cambiantes la mantiene relevante y efectiva en la mejora del proceso de comprensión matemática de los estudiantes. La comprensión matemática de acuerdo a esta teoría describe cómo los estudiantes desarrollan su comprensión a través de diferentes estratos o niveles. Para Meel (2003, p. 228) el estudiante adquiere conceptos cuando construye una imagen del mismo. la estructura cognitiva total que se asocia con el concepto, lo cual incluye todas las imágenes mentales y las propiedades y procesos asociados

Relación entre la teoría de la evolución de la comprensión matemática y el pensamiento variacional.

La teoría de la evolución matemática, desarrollada por Pirie y Kieren, ofrece una perspectiva interesante sobre cómo los alumnos desarrollan su comprensión matemática. Esta teoría se centra en cómo evolucionan los alumnos a través de distintos niveles de pensamiento matemático. Se centra en la noción de que los individuos progresan a través de diferentes fases o niveles de pensamiento matemático, y que estas fases se desarrollan progresiva y acumulativamente.

Génesis Instrumental de Rabardel:

La génesis instrumental se refiere al proceso de desarrollo y adopción de herramientas matemáticas y tecnológicas, como Geogebra, en la práctica educativa y matemática. En el contexto de Geogebra, se refiere a cómo ha evolucionado y se ha convertido en una parte integral de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

La relación instrumental es un concepto propuesto por Rabardel en el contexto de la psicología ergonómica y la ergonomía cognitiva. Rabardel sugiere que los objetos técnicos, como las herramientas y los artefactos, tienen un papel mediador en la actividad humana. Estos objetos técnicos no son simplemente herramientas pasivas que los humanos utilizan para llevar a cabo tareas; en cambio, están integrados en el proceso cognitivo y afectan la forma en que las personas piensan y resuelven problemas. Estas teorías son complementarias. Por un lado, Pirie y Kieren destacan la importancia de las herramientas en la generación de múltiples representaciones para enriquecer la comprensión matemática. Por otro lado, Rabardel resalta el papel de los artefactos como mediadores que potencian el aprendizaje. Ambos enfoques son fundamentales para desarrollar el pensamiento variacional y sustentar el Modelo Instrumental de la Comprensión Variacional propuesto durante la investigación, que surgió como la integración de estas dos perspectivas teóricas fundamentales en el aprendizaje matemático. Este modelo responde a la necesidad de comprender cómo los estudiantes de educación primaria desarrollan la comprensión del pensamiento variacional mediante el uso de herramientas digitales como GeoGebra, al tiempo que transitan por diferentes niveles de abstracción matemática.

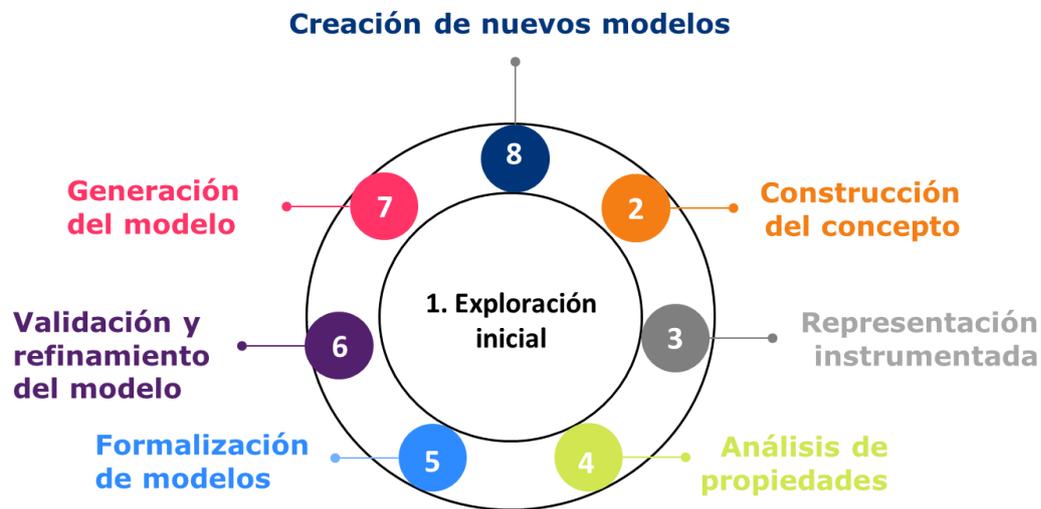
El Modelo propuesto se construyó a partir de un análisis detallado de los descriptores de cada nivel del modelo Pirie y Kieren y los procesos de instrumentalización e instrumentación descritos por Rabardel.

Las adaptaciones realizadas permitieron unificar ambas teorías en un marco operativo que conecta el



desarrollo cognitivo de los estudiantes con el uso de herramientas tecnológicas, brindando un esquema claro para analizar el progreso en la comprensión matemática del PV. En la figura 2 se muestran los niveles de cada nivel.

Figura 2. Modelo Instrumental de la Comprensión Variacional



Nota: Elaboración propia.

Ventajas del Modelo Instrumental de la Comprensión Variacional

Dentro de las ventajas que tiene el modelo propuesto se encuentran:

- Fomenta el aprendizaje significativo: Al combinar el desarrollo conceptual y el uso de herramientas, promueve una comprensión más profunda del pensamiento variacional que va más allá de la memorización o el procedimiento.
- Apoyo en la transición al pensamiento formal: Ofrece un marco claro para guiar a los estudiantes desde las representaciones concretas hacia los niveles más abstractos de comprensión matemática.
- Facilita el análisis de la comprensión: Permite identificar con precisión los niveles alcanzados por los estudiantes y los obstáculos encontrados, proporcionando información clave para ajustar la enseñanza.
- Potencia la mediación tecnológica: Resalta el valor de las herramientas digitales no solo como recursos, sino como agentes transformadores de la comprensión matemática.
- Aplicabilidad práctica: Su diseño es adaptable a otros niveles educativos y contextos, con ajustes mínimos, lo que amplía su alcance en la enseñanza de las matemáticas.

Por lo tanto, el Modelo Instrumental de la Comprensión Variacional es un aporte significativo al campo

de la educación matemática, al proponer un modelo teórico-práctico que articula la evolución de la comprensión matemática con el papel de las herramientas digitales en el aprendizaje. Su implementación no solo permite mejorar la comprensión del pensamiento variacional, sino también avanzar en la integración efectiva de la tecnología en el aula.

METODOLOGÍA

La presente investigación adoptó un diseño metodológico mixto con enfoques cuantitativo y cualitativo, orientado a analizar la comprensión del pensamiento variacional en estudiantes de quinto grado de educación primaria. Este enfoque permitió integrar el análisis de datos numéricos con interpretaciones profundas sobre los procesos de aprendizaje, asegurando una visión integral de los fenómenos estudiados.

Diseño del Estudio: El estudio se estructuró en dos fases principales:

Fase Cuantitativa (Cuasiexperimental): Se empleó un diseño cuasiexperimental con un grupo experimental y un grupo de control. El grupo experimental utilizó el software GeoGebra como herramienta mediadora, mientras que el grupo de control trabajó exclusivamente con métodos tradicionales de lápiz y papel. Ambos grupos resolvieron tareas diseñadas para abordar problemas de variación y cambio, ajustados al contexto y nivel educativo de los participantes.

Fase Cualitativa (Estudio de Casos): Se seleccionaron tres estudiantes representativos del grupo experimental para un análisis detallado, basándose en los niveles de comprensión matemática descritos por la teoría de Pirie y Kieren. Este enfoque permitió observar de cerca las actividades de instrumentalización e instrumentación, según la génesis instrumental de Rabardel, y su impacto en la comprensión del pensamiento variacional.

Participantes

La investigación se llevó a cabo en una institución educativa oficial de Colombia. La muestra se seleccionó por conveniencia y estuvo conformada por estudiantes de quinto grado de dos grupos con características demográficas similares. Se realizó una prueba diagnóstica inicial para asegurar la equivalencia entre los grupos en cuanto a sus saberes previos sobre pensamiento variacional.

Instrumentos y Procedimientos

Pruebas Diagnósticas y Finales: Se aplicaron pruebas al inicio y al final del estudio para evaluar los



niveles de comprensión del pensamiento variacional en ambos grupos. Estas pruebas incluyeron actividades basadas en los descriptores de los niveles de comprensión de Pirie y Kieren.

Estrategia didáctica: Con el propósito de determinar los distintos niveles y características de cada nivel teniendo en cuenta la Teoría de la evolución de la comprensión matemática y la Genesis Instrumental, se elaboró y aplicó una estrategia didáctica durante el año lectivo 2024.

Tareas Primeras y Segundas: La estrategia didáctica se elaboró teniendo en cuenta las tareas primera y segunda que fueron parte de la instrumentalización e instrumentación desarrollada por los estudiantes.

- Tareas Primeras: Diseñadas para que los estudiantes trabajaran conceptos de variación y cambio de manera directa, como completar tablas numéricas y analizar patrones.
- Tareas Segundas: Actividades instrumentadas con GeoGebra para el grupo experimental, orientadas a explorar propiedades y relaciones mediante representaciones dinámicas y gráficas.

Observaciones y Entrevistas: En la fase cualitativa, se realizaron observaciones no estructuradas y entrevistas semiestructuradas con los dos estudiantes seleccionados. Esto permitió identificar las estrategias y dificultades experimentadas durante la transición entre niveles de comprensión.

Análisis de Datos

Cuantitativo: Los datos recogidos en las pruebas inicial y final fueron analizados mediante estadísticas descriptivas e inferenciales para determinar diferencias significativas en los niveles de comprensión entre los grupos.

Cualitativo: Se utilizó un análisis temático para interpretar las observaciones y entrevistas, enfocándose en las actividades de instrumentalización e instrumentación, así como en el avance de los estudiantes a través de los niveles de comprensión del pensamiento variacional.

El enfoque mixto permitió triangulación de datos, fortaleciendo la validez de los hallazgos. Este diseño integral facilitó una comparación detallada entre los métodos tradicionales y el uso de GeoGebra en la enseñanza del pensamiento variacional

Procedimiento

La implementación del diseño metodológico se llevó a cabo en cuatro etapas principales, integrando los enfoques cuantitativo y cualitativo para garantizar un análisis robusto del pensamiento variacional en estudiantes de quinto grado.



Etapa 1: Diagnóstico Inicial

Propósito: Identificar los saberes previos de los estudiantes sobre pensamiento variacional y asegurar la equivalencia inicial entre los grupos experimental y de control.

Acciones: Se aplicó una prueba diagnóstica a los estudiantes de ambos grupos, evaluando conceptos básicos de variación y cambio mediante actividades como análisis de patrones numéricos y resolución de problemas básicos.

Resultados: Los puntajes obtenidos se utilizaron para confirmar que ambos grupos tenían niveles similares de comprensión inicial, lo que garantizó la validez de la comparación.

Etapa 2: Intervención Didáctica

Duración: La intervención se realizó durante un periodo de seis semanas, con dos sesiones semanales de una hora cada una, como parte de la investigación cuasiexperimental en los grupos que conformaban la investigación. Al término de cada fase que formaba parte de la estrategia didáctica se analizaban las hojas de respuestas de los estudiantes con el fin de determinar en que nivel se encontraban, al igual si era necesario realizar las acciones de complementariedad, para lograr este objetivo se diseñó una rejilla de evaluación con los descriptores de cada estrato.

En el Grupo Experimental los estudiantes trabajaron tareas instrumentadas con GeoGebra, diseñadas para explorar el pensamiento variacional mediante representaciones gráficas y dinámicas. Estas actividades incluyeron la creación de gráficos interactivos, análisis de propiedades de funciones simples y exploración de cambios entre variables dependientes e independientes.

A su vez en el Grupo de Control, los estudiantes abordaron las mismas tareas que el grupo experimental, pero resolvieron los problemas exclusivamente con lápiz y papel, siguiendo métodos tradicionales. Se promovió la discusión grupal sobre patrones y relaciones, pero sin acceso a herramientas digitales.

Etapa 3: Estudio de casos

Teniendo en cuenta los estudiantes que conformaban el grupo experimental se escogieron dos participantes para el estudio cualitativo, teniendo en cuenta el nivel que alcanzaron después de la implementación de la estrategia didáctica.

Observaciones: Durante las sesiones del grupo experimental, se realizaron observaciones enfocadas en las actividades de instrumentalización e instrumentación, documentando el uso de GeoGebra y su



impacto en el aprendizaje.

Entrevistas: Se llevaron a cabo entrevistas semiestructuradas con los estudiantes del grupo experimental seleccionados para el estudio de casos, explorando sus percepciones y estrategias en el uso de GeoGebra.

Etapa 4: Análisis de Datos

Al término de la intervención, se aplicó una prueba final para evaluar los avances en la comprensión del pensamiento variacional en ambos grupos. Los datos cuantitativos de las pruebas diagnósticas y finales fueron analizados estadísticamente para identificar diferencias significativas entre los grupos.

Los datos cualitativos de las observaciones y entrevistas fueron codificados y categorizados, permitiendo interpretar los avances en la comprensión según los niveles del modelo Instrumental de la comprensión variacional.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Resultados cuantitativos (investigación cuasiexperimental)

El análisis estadístico de los datos recopilados en las pruebas diagnóstica y final mostró diferencias significativas en los niveles de comprensión del pensamiento variacional entre el grupo experimental (mediado por GeoGebra) y el grupo de control (métodos tradicionales). Comparación de puntajes promedio:

- Grupo experimental: Los puntajes promedio aumentaron de 48.6 en la prueba diagnóstica a 79.4 en la prueba final, reflejando una mejora del 63%.
- Grupo de control: Los puntajes promedio aumentaron de 49.1 a 56.8, lo que equivale a una mejora del 15%.

Para el **análisis inferencial** se realizó una prueba t para muestras independientes, obteniendo un valor $p < 0.001$, lo que indica diferencias estadísticamente significativas entre ambos grupos en la prueba final. De igual manera el tamaño del efecto calculado (Cohen's $d = 1.24$) sugiere un impacto fuerte de la intervención con GeoGebra en la comprensión del pensamiento variacional.

Con respecto a los niveles de comprensión: En el grupo experimental, el 85% de los estudiantes alcanzó el nivel 5 del modelo de Pirie y Kieren, mientras que solo el 35% del grupo de control logró este nivel. Ningún estudiante del grupo experimental permaneció en los niveles 1 o 2 al finalizar la intervención,



mientras que el 20% del grupo de control continuó en estos niveles.

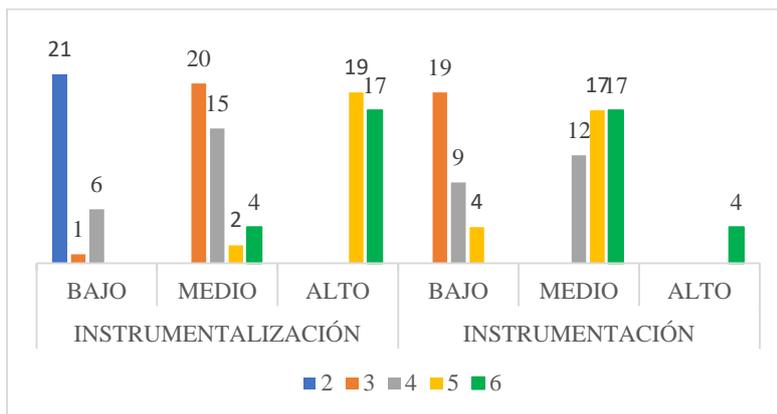
Resultados Cualitativos (Estudio de Casos)

El análisis cualitativo permitió profundizar en las estrategias y procesos involucrados en la comprensión del pensamiento variacional

Instrumentalización e instrumentación

- Los estudiantes del grupo experimental mostraron un nivel alto de instrumentación al explorar las herramientas de GeoGebra, pero fue en la instrumentación donde destacaron: utilizaron gráficos dinámicos y comandos para interpretar y predecir patrones de variación.
- Los estudiantes del grupo de control presentaron dificultades para representar gráficamente las relaciones de cambio, limitándose a cálculos numéricos básicos.

Figura 3. Estudiantes por nivel del MICV en los procesos de instrumentación e instrumentación

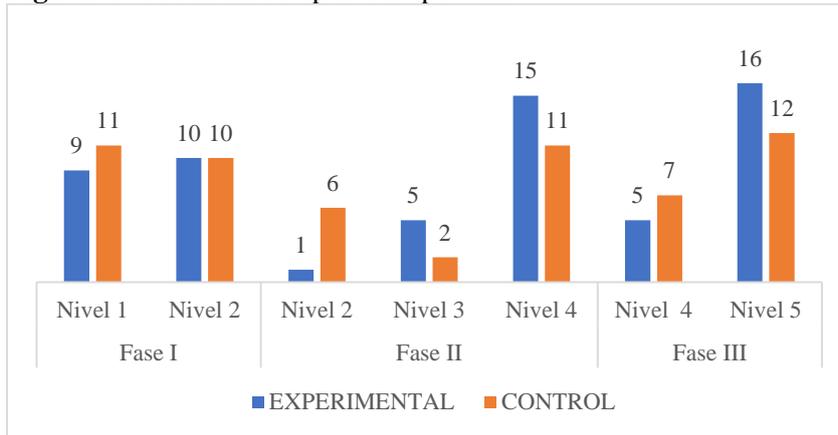


Nota: Solis (2024, p. 198)

Transición entre niveles

- Los estudiantes del grupo experimental avanzaron más fácilmente entre los niveles 3 y 5, gracias a la visualización interactiva que ofrecía GeoGebra.
- En el grupo de control, se observaron estancamientos frecuentes en el nivel 4, principalmente debido a la falta de representaciones dinámicas que apoyaran su comprensión.

Figura 4. Niveles de comprensión por fase



Nota: Solís (2024, p. 202)

Los resultados cuantitativos y cualitativos confirman que el uso de GeoGebra favorece significativamente la comprensión del pensamiento variacional en estudiantes de quinto grado.

Comparación entre grupos

- Los resultados estadísticos indican que el grupo experimental superó al grupo de control tanto en puntajes como en niveles de comprensión alcanzados. Esto valida la hipótesis de que GeoGebra actúa como un mediador efectivo en el aprendizaje del pensamiento variacional.
- En el estudio de casos, los estudiantes del grupo experimental demostraron una mayor capacidad para generalizar patrones y realizar predicciones, lo que se alinea con los niveles superiores del modelo de Pirie y Kieren.

Relación con investigaciones previas

- Estudios como los Galarza (2022), Pérez (2019) Sevillanos (2022) y Carballo & Mojica (2021), subrayan que las herramientas digitales facilitan la transición entre representaciones matemáticas. Nuestros hallazgos refuerzan esta idea, mostrando que GeoGebra no solo mejora la representación gráfica, sino también la capacidad de los estudiantes para conectar conceptos numéricos, algebraicos y geométricos.
- La baja transición en el grupo de control coincide con las limitaciones descritas por Rabardel (2011), donde la falta de herramientas instrumentadas puede restringir el avance hacia niveles superiores de comprensión.

Implicaciones para la enseñanza

La visualización y manipulación dinámica que ofrece GeoGebra se consolidan como estrategias clave

para promover la comprensión del cambio y la variación, especialmente en contextos educativos donde los métodos tradicionales no logran activar niveles superiores de razonamiento matemático.

CONCLUSIONES

La integración de Teorías en el Modelo Instrumental de la Variación propuestos permite desarrollar un marco teórico integral que integra la teoría de la evolución de la comprensión matemática con la teoría de la génesis instrumental, proporcionando un marco teórico completo que pretende explicar cómo los estudiantes desarrollan el pensamiento variacional, identificando las etapas clave en la evolución de la comprensión matemática, desde conceptos básicos hasta niveles avanzados, proporcionando una guía para los educadores.

En última instancia, esta investigación puede tener un impacto significativo en la forma en que se enseña y se aprende matemáticas, proporcionando a educadores y estudiantes herramientas más efectivas y enriquecedoras para explorar y comprender el mundo de las matemáticas variacionales.

La investigación demuestra que el uso de GeoGebra mejora significativamente la comprensión del pensamiento variacional en comparación con los métodos tradicionales.

Los estudiantes del grupo experimental lograron mayores avances en los niveles de comprensión del modelo de Pirie y Kieren, destacando la relevancia de las herramientas digitales para superar los retos en la enseñanza de conceptos abstractos como la variación y el cambio.

Los hallazgos enriquecen las teorías de Pirie y Kieren y de la génesis instrumental, mostrando cómo la interacción con herramientas como GeoGebra fomenta tanto la instrumentalización como la instrumentación, impulsando el tránsito entre niveles de comprensión.

Recomendaciones pedagógicas

Se recomienda integrar herramientas digitales como GeoGebra en las prácticas educativas, particularmente en los grados inferiores, para establecer bases sólidas en el pensamiento variacional y facilitar la transición hacia conceptos matemáticos más complejos.

Limitaciones y futuras investigaciones

Aunque los resultados son prometedores, la muestra estuvo limitada a una institución específica. Investigaciones futuras podrían explorar estos hallazgos en contextos más diversos y analizar el impacto a largo plazo de la mediación tecnológica en la comprensión matemática.



En resumen, el uso de GeoGebra no solo transforma las dinámicas de aprendizaje en el aula, sino que también refuerza la capacidad de los estudiantes para enfrentar problemas de variación y cambio, aportando herramientas valiosas para su desarrollo académico y cotidiano.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Arrieta, J. L. (2003). Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula. Centro de investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional.
- Carballo, A. M., & Mojica, A. D. (2021). *Estrategia didáctica fundamentada en el uso de GeoGebra para mejorar la comprensión del concepto de semejanza de triángulos*. Journal Educational Innovation/Revista Innovación Educativa, 21(87), 11-33.
- Galarza, G. A. (2022). *GeoGebra para mejorar el aprendizaje de matemática en estudiantes de primero de bachillerato, del Distrito 09D06 de Guayaquil-2021*. Universidad César Vallejo.
- Hernández, A. (2021). *Resolución de problemas con Geogebra en la formación inicial de profesores de matemáticas: un análisis desde la actividad matemática*. Universidad de La Laguna.
- Londoño, R. A. (2011). *La relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren*. Universidad de Antioquia.
- Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(3), 221-278.
- Pérez, C. R. (2019). *Prácticas Matemáticas en SGD: Congruencia de Triángulos. 1º Congreso Internacional de Ciencias Humanas - Humanidades entre pasado y futuro*. Buenos Aires: Universidad Nacional de San Martín, Gral. San Martín. <http://t.ly/EeOxb>
- Piaget, J. (1991). *Seis estudios de Psicología*. Editorial Labor, S.A.
- Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Pirie, S. E., & Kieren, T. E. (1994). Beyond metaphor: Formalising in mathematical understanding within constructivist environments. *For the learning of Mathematics*, 14(1), 39-43.
- Rabardel, P. (1995). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. Ediciones UIS.



- Rabardel, P. (2011). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. Ediciones Universidad Industrial de Santander.
- Ruiz-López, N. (2012). *Análisis del desarrollo de competencias geométricas y didácticas mediante el software de geometría dinámica geogebra en la formación inicial del profesorado de primaria*. Universidad Autónoma de Madrid.
- Sevillanos, A. (2022). *Uso del GeoGebra en una competencia matemática en estudiantes de secundaria de una institución educativa, Cusco 2022*. Universidad César Vallejo.
- Solis, L. (2024). *Pensamiento variacional en educación primaria: Un estudio desde las perspectivas de la Teoría de la Evolución de la Comprensión Matemática y la Génesis Instrumental*. Universidad. San Buenaventura Cali.
- Vasco, C. E. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En C. E. Vasco, *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos* (págs. 134-148). Universidad Pedagógica Nacional.

