



Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, Ciudad de México, México.
ISSN 2707-2207 / ISSN 2707-2215 (en línea), mayo-junio 2025,
Volumen 9, Número 3.

https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v9i1

CONSTRUCCIÓN DE UNA TEORÍA LOCAL SOBRE EL APRENDIZAJE DEL NÚMERO IRRACIONAL EN ESTUDIANTES DE GRADO UNDÉCIMO

CONSTRUCTION OF A LOCAL THEORY ON THE LEARNING OF IRRATIONAL NUMBERS IN ELEVENTH GRADE STUDENTS

Daniel Alberto Valderrama Martínez
Universidad Antonio Nariño, Colombia

Gerardo Antonio Chacón Guerrero
Universidad Antonio Nariño, Colombia

DOI: https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v9i3.18096

Construcción de una Teoría Local Sobre el Aprendizaje del Número Irracional en Estudiantes de Grado Undécimo

Daniel Alberto Valderrama Martínez¹dvalderrama19@uan.edu.com<https://orcid.org/0000-0002-6554-926X>Universidad Antonio Nariño
Colombia**Gerardo Antonio Chacón Guerrero**gerardoachg@uan.edu.com<https://orcid.org/0000-0002-7325-5245>Universidad Antonio Nariño
Colombia

RESUMEN

Se presenta una teoría local emergente sobre el aprendizaje del número irracional, construida mediante la integración metodológica de la Investigación Basada en el Diseño (IBD) y la Teoría Fundamentada (TF). A través de ciclos sistemáticos de codificación y análisis, se caracterizó el pensamiento matemático de 12 estudiantes de grado undécimo con relación al concepto de número irracional, desde la perspectiva de cuatro componentes fundamentales: la noción de inconmensurabilidad, falta de cubrimiento de los números racionales sobre la recta numérica, distintas representaciones y el continuo numérico. Los resultados evidencian una progresión en el uso del discurso en los participantes desde niveles descriptivos hasta justificativos, mediada por la visualización geométrica y el desarrollo de diversos patrones según la heurística de Lakatos. La teoría emergente articula elementos descriptivos, explicativos y normativos, ofreciendo un marco conceptual que integra cinco categorías centrales: la inconmensurabilidad como fundamento conceptual, la visualización geométrica como mediadora, el continuo numérico mediado por límites de sucesiones, la articulación discursiva y heurística, y la aplicación interdisciplinar del concepto. Esta contribución teórica supera las limitaciones de enfoques fragmentados, proporcionando principios para el diseño de secuencias de enseñanza-aprendizaje que faciliten una comprensión más profunda y articulada de este concepto.

Palabras clave: números irracionales, inconmensurabilidad, aprendizaje complejo, teoría local emergente

¹ Autor principal

Correspondencia: dvalderrama19@uan.edu.com

Construction of a Local Theory on the Learning of Irrational Numbers in Eleventh Grade Students

ABSTRACT

An emergent local theory on irrational number learning is presented, constructed through the methodological integration of Design-Based Research (DBR) and Grounded Theory (GT). Through systematic cycles of coding and analysis, the mathematical thinking of 12 eleventh-grade students was characterized in relation to the concept of irrational numbers, from the perspective of four fundamental components: the notion of incommensurability, lack of coverage of rational numbers on the number line, different representations, and the numerical continuum. The results evidence a progression in participants' discourse use from descriptive to justificative levels, mediated by geometric visualization and the development of various patterns according to Lakatos' heuristics. The emergent theory articulates descriptive, explanatory, and normative elements, offering a conceptual framework that integrates five central categories: incommensurability as conceptual foundation, geometric visualization as mediator, numerical continuum mediated by sequence limits, discursive and heuristic articulation, and interdisciplinary application of the concept. This theoretical contribution overcomes the limitations of fragmented approaches, providing principles for designing teaching-learning sequences that facilitate a deeper and more articulated understanding of this concept.

Keywords: irrational numbers, incommensurability, complex learning, emergent local theory

*Artículo recibido 15 mayo 2025
Aceptado para publicación: 17 junio 2025*



INTRODUCCIÓN

Los números irracionales constituyen uno de los conceptos más desafiantes en la educación matemática contemporánea, representando un punto de inflexión conceptual que trasciende los niveles educativos y persiste como obstáculo epistémico desde la educación básica hasta la formación universitaria. Este concepto, que emerge históricamente de la crisis de las magnitudes inconmensurables en la antigua Grecia, continúa generando dificultades de comprensión que requieren enfoques pedagógicos fundamentados teóricamente para su superación efectiva.

El problema de investigación radica en que los enfoques tradicionales para la enseñanza del número irracional se caracterizan por su fragmentación conceptual, privilegiando representaciones decimales aisladas y desvinculándose del origen histórico-geométrico del concepto. Wang y Oh (2017) identifican que una de las principales dificultades surge de la ausencia de representaciones claras y concretas del número irracional, lo que obstaculiza significativamente su comprensión estudiantil. Complementariamente, Fischbein, Jehiam y Cohen (1995) señalan dos obstáculos fundamentales: la incomprensión de que los números racionales, a pesar de ser infinitos, no cubren completamente la recta numérica, y la noción de inconmensurabilidad como imposibilidad de encontrar una unidad de medida común entre ciertos segmentos. Sirotic y Zazkis (2007) evidencian que las investigaciones sobre la enseñanza de números irracionales son escasas, prevaleciendo estudios centrados exclusivamente en representaciones decimales sin considerar la inconmensurabilidad ni su relación con la completitud de la recta numérica.

La relevancia de esta investigación se fundamenta en la necesidad imperante de superar la fragmentación conceptual que caracteriza los enfoques pedagógicos actuales, desarrollando una comprensión integral que facilite posteriormente el abordaje de los números reales como conjunto completo. En el contexto educativo colombiano, los Estándares Curriculares de Matemáticas establecen que los estudiantes de grado undécimo deben "analizar representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales", "reconocer la densidad e incompletitud de los números racionales" y "establecer relaciones y diferencias entre distintas notaciones de números reales" (MEN, 1998). Sin embargo, existe una desconexión significativa entre estos objetivos curriculares y los

enfoques pedagógicos implementados, evidenciada en la literatura especializada, conversaciones con profesores, análisis de libros de texto y la experiencia investigativa.

El marco teórico se estructura sobre cuatro pilares fundamentales que sustentan esta investigación. Primero, la concepción de pensamiento matemático desarrollada por Falk de Losada (1994), quien distingue entre el pensamiento matemático como proceso cognitivo aplicable a cualquier contenido y el cuerpo de conocimientos matemáticos como contenido disciplinar específico. Segundo, la teoría del aprendizaje complejo propuesta por Van Merriënboer y Kirschner (2018), que enfatiza la integración holística de conocimientos, habilidades y actitudes, contrastando con enfoques atomísticos que fragmentan contenidos. Tercero, el desarrollo histórico-epistemológico del número irracional, que según Agarwal y Agarwal (2021) surge de la ruptura conceptual en la antigua Grecia cuando la escuela pitagórica descubrió las magnitudes inconmensurables. Cuarto, la heurística de pruebas y refutaciones propuesta por Lakatos (1976), que establece cinco reglas para la construcción del conocimiento matemático mediante procesos de conjetura, refutación y reformulación.

La literatura reciente, revela diversos enfoques para abordar las dificultades del aprendizaje del número irracional. Domínguez, Zubillaga y Morales (2024) proponen estrategias fundamentadas en la resolución de problemas y el uso de GeoGebra, enfocándose en el origen histórico del concepto. Hummes et al. (2022) investigan la integración de números irracionales en la enseñanza del teorema de Pitágoras mediante argumentación práctica. Wasserman et al. (2022) sugieren representar expansiones decimales infinitas como sucesiones de números racionales, desarrollando comprensión intuitiva del límite. Sin embargo, estos estudios abordan aspectos específicos sin proporcionar un marco teórico integral que articule sistemáticamente los componentes fundamentales del concepto.

Esta investigación se desarrolla en el contexto del Colegio San Rafael IED (Bogotá, Colombia), una institución de educación pública que atiende estudiantes de estratos socioeconómicos diversos. El estudio se realiza con estudiantes de grado undécimo que han completado su formación en matemáticas básicas y se encuentran en la etapa de transición hacia la educación superior, momento crucial para consolidar conceptos matemáticos fundamentales que sustentarán su formación posterior.

El objetivo de esta investigación es desarrollar una teoría local emergente sobre el aprendizaje del número irracional que integre cuatro componentes fundamentales del concepto (inconmensurabilidad,

falta de cubrimiento de los números racionales sobre la recta numérica, representaciones del número irracional y continuo numérico) con los procesos cognitivos que configuran el pensamiento matemático en estudiantes de grado undécimo. Esta teoría local, construida mediante la integración metodológica de la Investigación Basada en el Diseño y la Teoría Fundamentada, pretende superar las limitaciones de enfoques fragmentados tradicionales, proporcionando principios fundamentados empíricamente para el diseño de secuencias de enseñanza-aprendizaje que faciliten una comprensión más profunda y articulada de este concepto fundamental en la formación matemática.

MARCO TEÓRICO

Pensamiento matemático

El marco teórico de esta investigación se fundamenta en la concepción de pensamiento matemático desarrollada por Falk de Losada (1994), quien establece una distinción fundamental entre el pensamiento matemático como proceso cognitivo y el cuerpo de conocimientos matemáticos como contenido disciplinar. El pensamiento matemático constituye un conjunto de procesos mentales aplicables a cualquier contenido, funcionando de manera análoga al método científico.

Según Falk de Losada (1994), el pensamiento matemático se desarrolla mediante cuatro procesos cognitivos fundamentales: especialización (descomposición de problemas en partes manejables), conjetura (formulación de hipótesis sobre posibles soluciones), generalización (identificación de patrones y relaciones subyacentes), y convencimiento (elaboración de argumentos para validar conclusiones). Estos procesos operan de manera recursiva e integrada, promoviendo un aprendizaje activo donde los estudiantes desarrollan tanto conocimientos como habilidades de resolución de problemas y pensamiento crítico.

Falk de Losada identifica cuatro aspectos cognitivos esenciales para el desarrollo del pensamiento matemático: el uso de algoritmos que promuevan generalización y construcción de significados, la estrategia de "estar en el caso anterior" como método heurístico, el razonamiento y argumentación, y la transición entre los enfoques geométrico y aritmético.

Autores como Sierpinska (1994) definen la comprensión matemática como un proceso que trasciende la memorización, involucrando la capacidad de captar significados, relaciones y estructuras subyacentes de los conceptos matemáticos. Esta comprensión implica el reconocimiento de patrones, la

interpretación de notaciones y la capacidad de relacionar conceptos abstractos con situaciones concretas. En ese sentido, la investigación adoptó esta concepción de comprensión como fundamento teórico.

El aprendizaje complejo

Según Van Merriënboer y Kirschner (2018), el aprendizaje complejo implica la integración de conocimientos, habilidades y actitudes, coordinando diversas habilidades y aplicando lo aprendido en múltiples contextos. Este enfoque contrasta con el diseño atomístico que fragmenta contenidos en elementos básicos, adoptando una perspectiva holística que aborda la complejidad considerando la interconexión entre elementos.

English (2011) sostiene que el aprendizaje complejo reconoce el potencial de los estudiantes para abordar tareas cognitivamente demandantes, centrándose en el desarrollo de competencias fundamentales como la resolución colaborativa de problemas, el razonamiento flexible y el pensamiento crítico. El modelado matemático desempeña un papel central, utilizando problemas asociados a la realidad que permiten establecer múltiples soluciones.

El aprendizaje complejo se fundamenta en los principios del modelo 4C/ID (diseño instruccional de cuatro componentes), el cual proporciona un marco estructural para el desarrollo de habilidades complejas mediante la integración de los siguientes aspectos: 1) Tareas de aprendizaje que promuevan la construcción de conocimiento integrado, 2) Información de apoyo para abordar problemas no rutinarios y que requieren de elementos adicionales para su solución, 3) Información procedimental que contribuya a la automatización de diversos procesos cognitivos, y (4) Práctica de tareas parciales para adquirir la habilidad de utilizar distintos aspectos recurrentes. Estos cuatro aspectos son la base para la elaboración de las actividades de investigación.

Heurística de Lakatos en el desarrollo de pensamiento matemático.

La metodología de pruebas y refutaciones propuesta por Lakatos (1976) constituye un marco fundamental para comprender la evolución del conocimiento matemático. Lakatos estableció cinco reglas heurísticas: 1) Al formular una conjetura, es crucial intentar probarla y refutarla, examinando la prueba para identificar lemas significativos y buscando contraejemplos; 2) Ante un contraejemplo general, se debe desechar la conjetura inicial, incorporar un nuevo lema y formular una conjetura

mejorada; 3) Con un contraejemplo local, se debe verificar si también constituye un contraejemplo general. 4) Si el contraejemplo es local pero no global, se debe mejorar el análisis reemplazando el lema refutado. 5) Ante cualquier tipo de contraejemplo, se recomienda buscar un teorema más profundo a través de inferencias deductivas.

Según Komatsu (2016), estas reglas funcionan como directrices efectivas para el avance en la construcción del pensamiento matemático. La incorporación de lemas y exclusión de excepciones refinan conjeturas, mientras la ampliación del contenido mediante inferencias deductivas las generaliza para abarcar contraejemplos.

METODOLOGÍA

Diseño de la investigación

La investigación adoptó un enfoque cualitativo mediante la integración metodológica de la Investigación Basada en el Diseño (IBD) y la Teoría Fundamentada (TF). Esta articulación permitió realizar tanto el diseño y aplicación de las actividades, así como la construcción de teoría local emergente, superando las limitaciones de enfoques puramente descriptivos o exclusivamente instrumentales.

La IBD se desarrolló en cuatro fases principales: (1) Fundamentos teóricos que articulan los cuatro aspectos planteados en el marco teórico, (2) Diseño de la Secuencia de Enseñanza-Aprendizaje (SEA), (3) Implementación con estudiantes de grado undécimo, y (4) Evaluación y rediseño basado en evidencia empírica.

La TF se integró sistemáticamente mediante cinco procedimientos de codificación abierta y axial, asegurando que la teoría emergente estuviera sólidamente fundamentada en evidencias empíricas. El muestreo teórico guio tanto la selección de participantes como el refinamiento de las tareas de aprendizaje.

Participantes y contexto

La investigación se realizó con 12 estudiantes de grado undécimo del Colegio San Rafael IED (Bogotá, Colombia), seleccionados mediante muestreo intencional basado en distintos criterios específicos: desarrollo adecuado del pensamiento matemático, habilidades comunicativas, diversidad de competencias matemáticas, y la capacidad para participar en discusiones grupales.

La implementación requirió ocho sesiones de 110 minutos cada una, dedicando dos sesiones completas a cada tarea de aprendizaje. Se utilizó una estrategia de triangulación metodológica con múltiples fuentes de evidencia. Estas incluyeron producciones escritas, videograbaciones de sesiones, entrevistas semiestructuradas a expertos en educación matemática y observaciones de campo, lo que permitió un análisis más robusto de la información.

Secuencia de enseñanza-aprendizaje (SEA)

La SEA se fundamenta en el diseño de cuatro tareas de aprendizaje cuya complejidad se incrementó progresivamente durante su implementación. Este enfoque siguió el desarrollo histórico-epistemológico del concepto establecido en el marco teórico, gestionando cuidadosamente la carga cognitiva según los principios del aprendizaje complejo. Inicialmente se aplicó una prueba diagnóstica que permitiera examinar la comprensión previa de los estudiantes sobre los números racionales, asociada a su representación decimal, fraccionaria y porcentual, su ubicación en la recta numérica, orden, proporcionalidad y densidad.

A continuación, se presenta la estructura de cada una de las cuatro tareas de aprendizaje:

Tarea de aprendizaje N°1: esta tarea exploró los conceptos de conmensurabilidad e inconmensurabilidad, guiando al estudiante a abordar: 1) La noción de magnitudes conmensurables, ejemplificada con las relaciones entre la longitud del lado y la diagonal de un rectángulo, donde los lados de los triángulos rectángulos (lados y diagonal del rectángulo dado) formaron ternas pitagóricas. 2) La noción de magnitudes inconmensurables, presentada a través de la relación entre la longitud del lado y la diagonal de un cuadrado, y entre el lado y la diagonal de polígonos regulares e irregulares. 3) La representación de estas relaciones sobre la recta numérica, 4) La asignación de valores numéricos a las razones resultantes de dichas relaciones. 5) Aproximaciones a la longitud de la diagonal de un cuadrado por exceso y por defecto.

Figura 1: Estudiantes abordando la tarea de aprendizaje N°1



Fuente: autor (2025)

Tarea de aprendizaje N°2: introducción al número áureo (φ) a través de la proporción extrema y media de Eudoxo y la sucesión de Fibonacci, razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro (π) mediante aproximaciones por el método de exhaustión de Arquímedes, aproximaciones al número de Euler (e) a través de métodos geométricos de encajamiento de rectángulos.

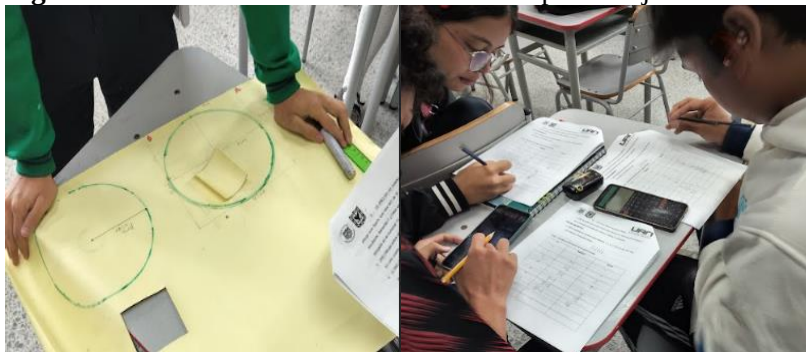
Figura 2: Estudiantes abordando la tarea de aprendizaje N°2



Fuente: autor (2025)

Tarea de aprendizaje N°3: introducción a sucesiones de números racionales que convergen tanto a números racionales como irracionales, desarrollando una comprensión intuitiva del concepto de límite empleando valores por defecto y por exceso.

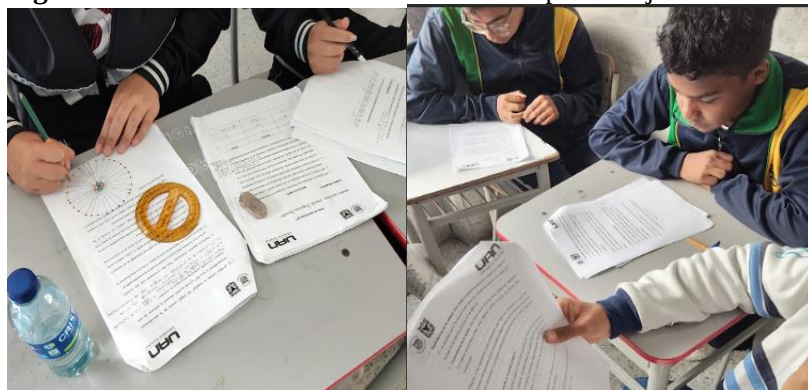
Figura 3. Estudiantes abordando la tarea de aprendizaje N°3



Fuente: autor (2025)

Tarea de aprendizaje N°4: aplicaciones interdisciplinarias en música (logaritmos y su relación con tonos musicales) y arte (ángulo áureo y la construcción de espirales presentes en la naturaleza), además de construcción de números irracionales mediante patrones en sus cifras decimales mediante la exploración de regularidades.

Figura 4: Estudiantes abordando la tarea de aprendizaje N°4



Fuente: autor (2025)

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El análisis se realizó a través de cinco ciclos sistemáticos de codificación abierta y axial correspondientes a cada tarea de aprendizaje más un ciclo que integra el desarrollo de pensamiento matemático según la heurística de Lakatos y el uso del discurso matemático público y privado. A continuación, se detalla la implementación de los cinco ciclos:

Codificación abierta: se identificaron conceptos preliminares y patrones iniciales en las concepciones de los estudiantes, generando códigos específicos para cada componente del número irracional.

Codificación axial: se establecieron relaciones causales, de apoyo y transición entre categorías emergentes, construyendo un esquema conceptual integrado.

Codificación selectiva: se integraron distintas categorías en una teoría local que explica los procesos de aprendizaje del número irracional.

Se construyeron matrices de convergencia que integraron sistemáticamente cuatro fuentes de evidencia, relacionando cada categoría principal con los cuatro aspectos descritos por Falk de Losada: interpretación de las respuestas dadas por los participantes, entrevistas a expertos, entrevistas a estudiantes, y análisis de vídeos y observaciones de campo, facilitando una comprensión multidimensional de los procesos cognitivos involucrados mediante las intersecciones significativas que arrojó el análisis.

Categorías emergentes

Primer Ciclo: Tarea de Aprendizaje N°1

El análisis de la exploración de magnitudes conmensurables e inconmensurables reveló cuatro códigos emergentes fundamentales:

I-CP1 (Reconocimiento intuitivo de la imposibilidad de hallar una medida común): Los estudiantes reconocieron experimentalmente que múltiplos de la unidad (2, 5, 10 unidades) que funcionaban para medir los lados de un rectángulo de 30×40 unidades no podían medir simultáneamente el lado y la diagonal de un cuadrado de 30×30 unidades.

I-CP2 (Mediación efectiva con material manipulable): El uso de papel milimétrico y material concreto generó comprensión superior al cálculo algorítmico mediante el teorema de Pitágoras. Los estudiantes experimentaron físicamente la imposibilidad de medir segmentos inconmensurables.

RE-CP1 (Mejoramiento de las aproximaciones decimales): Mediante expresiones del tipo $a^2 < 2$ y $b^2 > 2$, los estudiantes desarrollaron aproximaciones progresivamente más precisas.

RN-CP1 (Desarrollo progresivo de representación en la recta numérica): El uso de regla y compás permitió representar valores que se aproximan a distintos números irracionales, superando las limitaciones de las aproximaciones decimales finitas.

Segundo Ciclo: Tarea de Aprendizaje N°2

La construcción de los números irracionales π , φ y e a través de sucesiones de números racionales, generó dos códigos adicionales:

RE-CP4 (La representación geométrica facilita la comprensión aritmética): Los estudiantes establecieron conexiones entre construcciones geométricas (polígonos inscritos y circunscritos en una circunferencia con un radio dado) y representaciones aritméticas (sucesiones de los perímetros de polígonos regulares inscritos y circunscritos a una circunferencia), evidenciando una comprensión más sólida que las aproximaciones decimales aisladas.

RE-CP5 (Percepción de la irracionalidad desde su representación geométrica): Los estudiantes reconocieron intuitivamente que "la circunferencia es el límite de los perímetros de polígonos regulares inscritos", desarrollando comprensión conceptual de la irracionalidad a través de modelos de representación geométrica.



Tercer Ciclo: Tarea de Aprendizaje N°3

El análisis de la tercera tarea de aprendizaje correspondiente a sucesiones de números racionales convergentes tanto a números racionales como irracionales evidenció la emergencia de códigos relacionados con el continuo numérico:

RE-CP6 (Diferenciación entre sucesiones que convergen a números racionales e irracionales): Los estudiantes diferenciaron intuitivamente entre sucesiones que convergen a números racionales como irracionales basándose en patrones en las cifras decimales de las aproximaciones decimales obtenidas, reconociendo un patrón de periodicidad para los números racionales y aperiocidad para los irracionales.

CO-CP2 (Construcción intuitiva del concepto de límite): Los estudiantes desarrollaron una comprensión intuitiva del límite de una sucesión como "acercamiento a un valor fijo sin alcanzarlo exactamente", determinando, por ejemplo, que la serie $1 - 1/2 + 1/4 - 1/8 + \dots$ converge a $2/3$ mediante la identificación del periodo decimal.

CO-CP3 (Aproximación al concepto de densidad desde la geometría): Los estudiantes establecieron estrategias para encontrar valores asociados al área de cuadrados inscritos o circunscritos a una circunferencia, observando que siempre era posible hallar un número irracional entre dos números racionales.

Cuarto Ciclo: Tarea de Aprendizaje N°4

Las aplicaciones interdisciplinarias generaron códigos sobre construcción y aplicación:

RE-CP7 (Construcción de números irracionales a partir de cifras decimales): Los estudiantes utilizaron patrones en cifras decimales para crear números no periódicos, empleando diferentes cantidades de ceros entre unos en la caracterización de sus cifras decimales.

AP-CP1 (Aplicación de los números irracionales en otras disciplinas): Los estudiantes reconocieron números irracionales en contextos musicales y artísticos, construyendo espirales que se presentan en la naturaleza mediante la construcción y aplicación del ángulo áureo e interpretando logaritmos en base 2 en distintas escalas musicales.

Quinto Ciclo: Integración y Heurística de Lakatos

El análisis del discurso matemático y la aplicación de la heurística de Lakatos reveló tres códigos integradores:



DI-CP1 (Planteamiento de conjeturas y refutaciones): Los estudiantes construyeron conocimiento mediante dialéctica de proposiciones, contraejemplos y reformulaciones. Un ejemplo documentado muestra la progresión desde la conjetura "todos los múltiplos de 10 funcionan para medir lados y diagonales en cualquier rectángulo dado" hasta su refinamiento, tras encontrar contraejemplos que invalidaban la conjetura inicial.

DI-CP2 (Cognitiva-Procedimental): Se evidenció progresión desde descripciones informales ("no es posible calcular la diagonal porque el resultado es decimal") hacia justificaciones estructuradas ("los valores de la sucesión se aproximan al número π ").

DI-CP4 (Afectiva-Motivacional): Los problemas no rutinarios activaron curiosidad epistémica y generaron satisfacción al resolver desafíos, evidenciando el papel crucial del componente emocional en la construcción de conceptos matemáticos.

Categorías centrales emergentes

El análisis integrado de los cinco ciclos de codificación reveló cinco categorías centrales derivadas de la intersección de las categorías emergentes en cada ciclo de codificación abierta. Estas categorías, articulan los procesos de aprendizaje del número irracional. A continuación, se describe categoría:

La inconmensurabilidad como fundamento conceptual del número irracional: esta categoría describe el proceso mediante el cual los estudiantes desarrollan comprensión del número irracional a través del reconocimiento experiencial de la imposibilidad de encontrar una unidad común para medir simultáneamente ciertos segmentos. Se evidencia una progresión a través de cuatro fases: manifestación de sorpresa, búsqueda sistemática de múltiplos, aceptación de la inconmensurabilidad como propiedad intrínseca, y establecimiento de vínculos con la necesidad del número irracional.

La visualización geométrica como mediadora en la construcción del concepto de número irracional: esta categoría explica cómo las representaciones geométricas actúan como mediadores semióticos que facilitan la transición conceptual desde la experiencia concreta hacia la abstracción aritmética. Se manifiesta mediante la integración entre construcciones geométricas y aproximaciones aritméticas, la percepción de irracionalidad desde representaciones geométricas, y la diferenciación conceptual entre tipos de convergencia.

El continuo numérico mediado por el límite de sucesiones de números racionales: esta categoría describe el desarrollo de comprensión intuitiva del concepto de límite y continuidad mediante experiencias sistemáticas de convergencia de sucesiones de números racionales. Se evidencia mediante identificación de patrones en las distintas sucesiones, construcción intuitiva del concepto de límite, y aproximación a la densidad desde experiencias geométricas.

Articulación discursiva y heurística en la construcción del significado de número irracional: esta categoría explica la evolución del discurso matemático de los estudiantes a través de cuatro niveles diferenciados, integrada con patrones de razonamiento que siguen la heurística de Lakatos. Se manifiesta mediante dimensiones cognitiva-procedimental, comunicativa-discursiva, y afectiva-motivacional.

El análisis evidenció una evolución del discurso matemático en cuatro niveles claramente diferenciados: Nivel Descriptivo: Caracterizado por observaciones superficiales sin profundización conceptual, como "son decimales que no se repiten".

Nivel Procedimental: Implica aplicación de algoritmos específicos sin comprensión profunda del significado subyacente, como "los lados se calculan con el teorema de Pitágoras".

Nivel Relacional: Los estudiantes establecen conexiones significativas entre diferentes representaciones, como "se aproximan mediante sucesiones de números racionales".

Nivel Justificativo: Representa el estadio más avanzado, donde los estudiantes construyen argumentaciones coherentes sobre propiedades estructurales, como "no pueden ser racionales porque eso contradice su concepción geométrica".

FORMULACIÓN DE LA TEORÍA LOCAL

Aportes teóricos fundamentales

Esta investigación formula una teoría local emergente que trasciende la descripción de dificultades para proponer mecanismos explicativos sobre cómo ocurre el aprendizaje del número irracional y establecer principios normativos para procesos de enseñanza-aprendizaje más efectivos. La integración metodológica entre IBD y TF representa una innovación significativa que permite tanto el desarrollo de intervenciones educativas como la construcción simultánea de teoría fundamentada empíricamente.



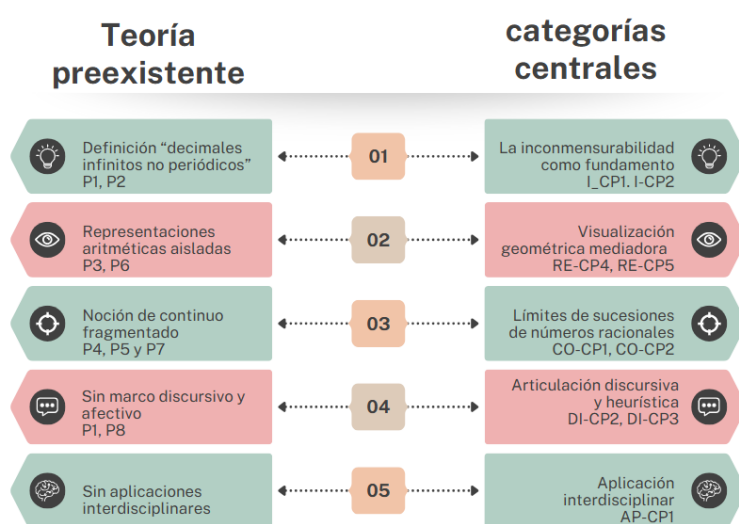
La identificación de cinco categorías centrales articuladas proporciona un marco conceptual robusto que explica los procesos cognitivos subyacentes al aprendizaje del número irracional. Particularmente significativo es el hallazgo de que la inconmensurabilidad, tradicionalmente relegada en los currículos actuales, emerge como fundamento conceptual esencial para la comprensión profunda del concepto.

Confrontación con la teoría preexistente

El análisis comparativo revela que los enfoques tradicionales fragmentados, caracterizados por ocho postulados identificados en la teoría preexistente (P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7 y P8), producen comprensiones limitadas del concepto. La teoría emergente supera estas limitaciones mediante la integración sistémica de los cuatro componentes fundamentales del número irracional.

La restauración de la conexión histórico-epistemológica entre inconmensurabilidad e irracionalidad, ausente en la teoría preexistente, aborda explícitamente la imposibilidad de encontrar una unidad común para medir ciertos segmentos. La integración de múltiples representaciones supera la dependencia exclusiva de representaciones decimales, mientras que la construcción del continuo numérico mediante límites de sucesiones racionales conecta conceptos tradicionalmente fragmentados.

Figura 5: Confrontación entre la teoría local existente y las categorías centrales.



Fuente: autor (2015).

Elementos descriptivos

Los elementos descriptivos de esta teoría local emergen de cinco ciclos sistemáticos de codificación mediante la integración metodológica entre la Investigación Basada en el Diseño (IBD) y la Teoría

Fundamentada (TF), estructurados en las cinco categorías centrales, cuatro estadios específicos donde surge el aprendizaje del número irracional y seis patrones de mediación:

Heurística de progresión conceptual: cuatro estadios específicos:

Estadio 1: Exploración Intuitiva

Ruptura epistemológica cuando esquemas racionales resultan insuficientes para medición directa.

Activadores: mediación con material manipulable, conflicto cognitivo, construcción experiencial.

Manifestación: "No hay múltiplo que sirva para medir lado y diagonal del cuadrado".

Estadio 2: Formalización Inicial

Búsqueda de herramientas simbólicas para comunicar descubrimientos intuitivos.

Mecanismos: refinamiento de aproximaciones decimales ($a^2 < 2, b^2 > 2$), asociación conceptual, desarrollo de vocabulario técnico.

Manifestación: uso progresivo de términos como "aproximación", "convergente", "inconmensurable".

Estadio 3: Crisis Representacional

Confrontación sistemática de limitaciones estructurales de representaciones iniciales.

Características: insuficiencia de aproximaciones finitas, necesidad de múltiples representaciones, cuestionamiento de completitud de racionales.

Manifestación: reconocimiento que representaciones decimales truncadas no capturan naturaleza irracional.

Estadio 4: Reestructuración Conceptual

Integración sistémica de los cuatro componentes fundamentales del número irracional.

Mecanismos: construcción intuitiva del límite, aproximación geométrica de densidad, aplicación interdisciplinar.

Manifestación: comprensión unificada trasciende componentes individuales.

Seis Patrones de mediación específicos:

Patrón 1: Mediación con Material Manipulable

Mecanismo: materiales concretos como apoyo permitiendo manipulación directa.

Manifestaciones: papel milimetrado → unidades de medida; construcciones geométricas → aproximaciones aritméticas; material → conflicto cognitivo.



Patrón 2: Mediación Geométrica-Aritmética Integrada

Mecanismo: representaciones geométricas como conexiones semióticas hacia abstracción numérica.

Relaciones: magnitudes inconmensurables↔números irracionales; aproximaciones constructivas↔sucesiones convergentes; continuidad recta↔completitud.

Patrón 3: Mediación Histórico-Epistemológica

Mecanismo: aprendizaje estudiantil sigue desarrollo histórico del concepto.

Correspondencias: crisis pitagórica↔exploración intuitiva; teoría Eudoxo↔formalización inicial; aritmetización análisis↔reestructuración conceptual.

Patrón 4: Mediación Discursiva

Dimensiones: discurso privado (reflexiones internas), discurso público (construcción colaborativa), evolución discursiva (informal→estructurada), vocabulario técnico.

Mecanismo: lenguaje constituye pensamiento matemático.

Patrón 5: Mediación Afectivo-Motivacional

Manifestaciones: sorpresa ante inconmensurabilidad→curiosidad epistémica; satisfacción en aproximaciones→refuerzo aprendizaje; aplicaciones interdisciplinarias→aumento interés.

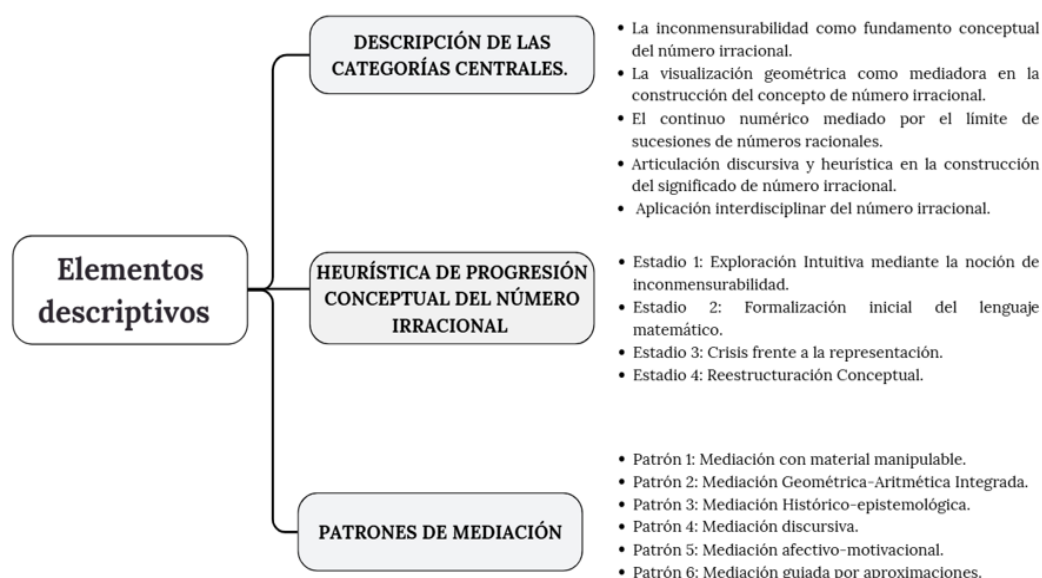
Mecanismo: emociones impulsan o dificultan aprendizaje.

Patrón 6: Mediación por Aproximaciones

Sub-patrones: aproximaciones decimales progresivas, aproximaciones por exceso/defecto, convergencia desde patrones geométricos, diferenciación racional/irracional por cifras decimales.

Mecanismo: aproximaciones racionales revelan infinito potencial mediante expresiones como $a^2 < 2$, $b^2 > 2$.

Figura 7: Elementos descriptivos de la teoría



Fuente: autor (2025)

Elementos explicativos

La teoría identifica siete principios explicativos fundamentales

Mecanismo de ruptura epistemológica mediada por el surgimiento de la inconmensurabilidad: La comprensión del número irracional emerge cuando los estudiantes experimentan una ruptura epistemológica al confrontar la insuficiencia de los números racionales para resolver problemas de medición directa.

- Principio de mediación geométrico-aritmético: las representaciones geométricas funcionan como mediadores semióticos que facilitan la transición desde la experiencia concreta hacia la abstracción aritmética.

Progresión en el uso del discurso matemático: el desarrollo del pensamiento matemático sigue una progresión necesaria a través de cuatro niveles discursivos diferenciados.

- Principio intuitivo del límite de una sucesión de números racionales: la comprensión del continuo numérico emerge mediante experiencias sistemáticas de convergencia que revelan la existencia del límite de una sucesión.
- Principio de implementación de la heurística de Lakatos: el conocimiento matemático se construye efectivamente mediante procesos de conjetura, refutación y reformulación que emergen naturalmente.

- Principio de motivación: el componente afectivo-motivacional se activa específicamente cuando los estudiantes enfrentan problemas auténticos no rutinarios que generan carga cognitiva y requieren una reorganización conceptual.
- Integración sistémica de los cuatro componentes del número irracional: la comprensión profunda requiere necesariamente la articulación de los cuatro componentes fundamentales, generando comprensiones emergentes que trascienden la suma de componentes individuales.

Elementos normativos

Los elementos normativos establecen principios orientadores fundamentados empíricamente para el diseño e implementación de secuencias de enseñanza-aprendizaje del número irracional. Emergen directamente de las cinco categorías centrales identificadas y los seis principios explicativos, proporcionando un marco coherente para la práctica educativa.

Principios fundamentales para el diseño de SEA

Principio de progresión epistemológica mediada por inconmensurabilidad: las SEA deben iniciarse necesariamente con experiencias directas de medición revelando imposibilidad de encontrar unidades comunes entre segmentos específicos, antes de introducir notación simbólica o algoritmos. Práctica requerida: diseñar actividades iniciales de medición directa usando múltiplos de unidad en figuras geométricas específicas; diferir introducción del teorema de Pitágoras hasta después de experiencia de inconmensurabilidad; presentar símbolos como $\sqrt{2}$ únicamente después de experimentar magnitudes inconmensurables concretas.

Principio de mediación geométrico-aritmética: comprensión profunda requiere articulación sistemática entre representaciones geométricas y aritméticas, donde las primeras actúan como mediadores semióticos esenciales. Estrategias específicas: priorizar construcciones geométricas (polígonos inscritos y circunscritos a una circunferencia para el cálculo de π , uso de rectángulos áureos para estimaciones de ϕ , particiones sucesivas de rectángulos para e) antes que manipulaciones decimales; integrar sistemáticamente material manipulable como componente permanente; establecer conexiones entre construcción geométrica y representación aritmética correspondiente.

Principio de construcción progresiva del discurso matemático: desarrollo del pensamiento matemático debe promoverse mediante evolución estructurada del discurso a través de cuatro niveles necesarios: descriptivo→procedimental→relacional→justificativo. Operacionalización requiere: diseñar preguntas específicamente orientadas a desarrollar cada nivel discursivo; alternar estratégicamente entre trabajo individual (discurso privado) y colaborativo (discurso público); evitar aceleración artificial hacia niveles superiores sin consolidar fundamentos previos.

Principio intuitivo del concepto de límite: comprensión del continuo numérico debe construirse mediante experiencias sistemáticas de convergencia revelando intuitivamente existencia de números límite, sin recurrir a formalizaciones prematuras. Estrategias específicas: implementar sistemáticamente aproximaciones por exceso y defecto antes de representaciones decimales descontextualizadas; construir sucesiones de números racionales en contextos geométricos y aritméticos; facilitar reconocimiento de patrones de convergencia sin imponer terminología formal innecesaria.

Criterios para la integración sistémica

Criterio de interconexión de cuatro componentes: cada componente fundamental (inconmensurabilidad, insuficiencia de racionales, representaciones múltiples, continuo numérico) debe conectarse con anteriores, evitando fragmentación. Secuencia integral: inconmensurabilidad como punto de partida→reconocimiento de insuficiencia de racionales→necesidad de representaciones diversas→construcción intuitiva del continuo como síntesis conceptual.

Implementación de la Heurística de Lakatos

Estrategia de conjeturas y refutaciones: las SEA deben crear espacios intencionales para surgimiento natural de: formulación de conjeturas→identificación de contraejemplos→reformulación conceptual. Implementación operativa: formular problemas abiertos posibilitando múltiples conjeturas iniciales; facilitar que contraejemplos emerjan durante trabajo colaborativo sin imposición externa; estructurar espacios de discusión donde reformulaciones surjan naturalmente del diálogo matemático.

Gestión constructiva del conflicto cognitivo: actividades deben desafiar suficientemente para motivar descubrimientos sin frustrar hasta abandono. Estrategias específicas: generar sorpresa controlada ante magnitudes inconmensurables; promover búsqueda de explicaciones frente a fenómenos irracionales; mantener equilibrio entre desafío cognitivo y accesibilidad conceptual.



Objetivos de aprendizaje deseables

Comprensión conceptual de inconmensurabilidad: desarrollar reconocimiento intuitivo de imposibilidad de encontrar unidades comunes mediante experiencia directa, estableciendo conexiones con necesidad histórica de ampliar conjuntos numéricos.

Construcción del continuo numérico: Desarrollar comprensión intuitiva de incompletitud de los números racionales y reconocer que los irracionales "completan" espacios sobre recta numérica.

Evolución del discurso matemático: transitar desde descripciones informales hacia justificaciones estructuradas con vocabulario técnico, incluyendo competencias argumentativas para procesos colaborativos.

Criterios de evaluación formativa

Indicadores de comprensión profunda: capacidad de explicar causalmente por qué ciertos números no pueden ser racionales; construir aproximaciones sistemáticas mediante múltiples estrategias; ubicar irracionales sobre recta numérica mediante construcciones geométricas con regla y compás.

Criterios de progresión discursiva: documentar calidad evolutiva de justificaciones estudiantiles; participación constructiva en procesos colaborativos; apropiación progresiva de vocabulario técnico contextualizado.

Indicadores de aplicación y transferencia: reconocimiento espontáneo de irracionales en contextos interdisciplinarios; aplicación efectiva del concepto en situaciones nuevas, fortaleciendo construcción de significado robusto.

CONCLUSIONES

La integración metodológica entre la Investigación Basada en el Diseño (IBD) y la Teoría Fundamentada (TF) demostró ser altamente efectiva para la construcción simultánea de intervenciones educativas y teoría local emergente. Los cinco ciclos sistemáticos de codificación alcanzaron saturación teórica, validando la robustez conceptual de los hallazgos.

Se formuló una teoría local que establece cinco categorías centrales articuladas: (1) la inconmensurabilidad como fundamento conceptual, (2) la visualización geométrica como mediadora, (3) el continuo numérico mediado por límites de sucesiones racionales, (4) la articulación discursiva y

heurística, y (5) la aplicación interdisciplinar del concepto. Esta teoría integra elementos descriptivos, explicativos y normativos fundamentados empíricamente.

Los estudiantes evidenciaron una progresión estructurada a través de cuatro estadios: exploración intuitiva, formalización inicial, crisis representacional y reestructuración conceptual. Paralelamente, el discurso matemático evolucionó desde niveles descriptivos hasta justificativos, mediado por la visualización geométrica y el desarrollo de patrones según la heurística de Lakatos.

La teoría establece principios específicos para el diseño de secuencias de enseñanza-aprendizaje: progresión epistemológica mediada por inconmensurabilidad, mediación geométrica-aritmética, construcción progresiva del discurso matemático, y desarrollo intuitivo del concepto de límite.

La investigación se desarrolló en contextos específicos (12 estudiantes de grado undécimo), limitando la generalización inmediata. Se requieren estudios longitudinales, implementación en contextos diversos, e investigación sobre la permanencia de las comprensiones desarrolladas para fortalecer la validez externa de la teoría emergente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Agarwal, R., & Agarwal, H. (2021). Origin of Irrational Numbers and Their Approximations. *Computation*, 9, 1-49.
- English, L. (2011). Complex learning through cognitively demanding task. *An electric, independent, international research journal hosted by the department of mathematics sciences – University of Montana*, 8.
- Falk de Losada, M. (1994). Estrategias acerca de la naturaleza y el desarrollo del pensamiento matemático extraídas de la historia del álgebra. *Boletín de matemáticas Nueva serie*, 1, 39-58.
- Fischbein, E., Jehiam, R., & Cohen, D. (1995). The concept of irrational numbers in high school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 29, 29-44.
- Katz, J.V. (1998). *History of Mathematics: An Introduction*. Addison-Wesley.
- Koichu, B. (2019). A Discursively Oriented Conceptualization of Mathematical Problem Solving. *Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development*. Springer, 43-63.
- Komatsu, K. (2016). A framework for proofs and refutations in school mathematics: Increasing content



- by deductive guessing. *Conference: Task Design in Mathematics Education: Proceedings of ICMI Study 22*, 471–479.
- Lakatos, I. (1976). *Pruebas y Refutaciones: la lógica del descubrimiento matemático*. Editorial Alianza.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*.
- Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. Studies in Mathematics Education Series. The Falmer Press.
- Sirotic, N., & Zazkis, R. (2007). Irrational numbers on the number line – Where are they? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38, 477-488.
- Van Merriënboer, J., & Kirschner, P. (2018). *A systematic approach to four-component instructional design*. Ten steps to complex learning. Third edition.
- Wang, H., & Oh, K. (2017). Analysis Study of Textbooks on Irrational Numbers: perspectives on Process and Object. *The mathematical Education*, 56, 131-145.
- Wasserman, N., Fukawa-Connelly, T., Weber, K., Mejía, J., & Abbott, S. (2022). *Understanding Analysis and its Connections to Secondary Mathematics Teaching*. Springer text in education

