

Solución del problema de valores en la frontera sobre pandeo de columnas

Alberto Ernesto Gutiérrez Borda

egutierrez@unica.edu.pe

<https://orcid.org/0000-0001-6260-2419>

Orlando Eugenio Berrocal Navarro

oberrocal@unica.edu.pe

<https://orcid.org/0000-0002-6151-6540>

Universidad Nacional San Luis Gonzaga
Facultad de Ciencias
Ica - Perú

RESUMEN

Un problema latente en el ámbito de la construcción es la desviación angular de una columna, el trabajo consiste en el análisis e interpretación cualitativa del fenómeno de pandeo de columnas por flexión. El objetivo es conocer el comportamiento de la barra frente a una inestabilidad estructural. Los resultados obtenidos describen la forma práctica de obtener algoritmos para columna de sección constante o variable, analizando las condiciones de frontera, y al ser modelado por ecuaciones diferenciales, se resuelve por un método diferencial, pero existe casos donde se aplican las funciones de Bessel bajo un dimensionamiento adecuado que permiten optimizar ciertos elementos estructurales.

Palabras claves: funciones de Bessel; pandeo de columnas; carga crítica; pandeo de Euler.

Solution of the boundary value problem on buckling of columns

ABSTRACT

A latent problem in the field of construction is the angular deviation of a column, the work consists of the analysis and qualitative interpretation of the phenomenon of buckling of columns by bending. The objective is to know the behavior of the bar in the face of structural instability. The results obtained describe the practical way of obtaining algorithms for column of constant or variable section, analyzing the boundary conditions, and being modeled by differential equations, it is solved by a differential method, but there are cases where the Bessel functions are applied under a suitable dimensioning that allow optimizing certain structural elements.

Keywords: *bessel functions; column buckling; critical load; euler buckling*

Artículo recibido: 25 febrero 2022

Aceptado para publicación: 10 marzo 2022

Correspondencia: egutierrez@unica.edu.pe

Conflictos de Interés: Ninguna que declarar

INTRODUCCIÓN

Un problema frecuente, es observar como una columna uniforme, empotrada en concreto se pandea. Aplicando la teoría de elasticidad y el cálculo diferencial, el modelo matemático que describe la desviación angular de una columna es dada por el problema de valores en la frontera, donde interviene el módulo de Young del material de la columna, el momento de inercia de la sección transversal, la densidad de la columna, la aceleración de la gravedad y la desviación angular de la columna (Edwards et al, 1993; Conte, 1980).

El pandeo es un problema propio de la ingeniería, que consiste en determinar cuándo una columna empotrada en un concreto rígido se pandea, la idea de encontrar una estabilidad estructural está asociado a un problema de la física (Brauer, 1967). Newton, uno de los creadores del cálculo diferencial, conjeturó que si la ecuación $\frac{d^n y}{dx^n} = 0$, entonces $y(x)$ es un polinomio de grado $n - 1$, en la actualidad esta conjetura está demostrada de manera rigurosa y es una solución de esta ecuación diferencial (Strang, 1980; Birkhoff, 1969).

En la ciencia, el pandeo es una inestabilidad matemática que observa una falla. Cuando una estructura se somete a compresión, el pandeo se refleja por una desviación de un miembro estructural, a medida que aumenta una carga aplicada sobre una parte. Los cuestionamientos de estabilidad elástica relativa al pandeo de columnas comprimidas fueron estudiados por Euler (Braun, 1983). El problema en estudio, es bajo las condiciones de considerar la columna como un material perfectamente homogéneo y elástico que verifica la Ley de Hooke, su eje idealmente recto y, la carga está exactamente centrada (Churchill, 1978; Leigton, 1966).

Para determinar una solución, se inicia por observar la actuación de una fuerza perturbadora horizontal e infinitésima y, se asume que el equilibrio vertical es indiferente, de modo que la barra pasa a otra configuración de equilibrio curvada. Partiendo del hecho de que el modelo matemático, que describe el pandeo de columnas empotrados en concreto rígido, es un problema de valores de frontera tipo Airy, este se resolverá usando las funciones de Bessel (Brenner, 1966).

El trabajo tiene por objetivo realizar aportes al estudio de pandeo por flexión de columnas, donde intervienen diferentes condiciones de sustentación. La información correcta ayuda a optimizar y disminuir las secciones de las barras, se realiza un análisis cualitativo de

este fenómeno, que permita conocer la ecuación de desplazamiento y el comportamiento de la barra como consecuencia de la inestabilidad, y determinación de la carga crítica.

La pretensión de modelar sistemas estructurales más complejos, se inicia por el análisis teórico-práctico de pandeo en columnas de inercia variable con condiciones genéricas de sustentación en sus extremos, proponer ecuaciones como leyes que obedecen el comportamiento frente a pandeo de distintas barras pertenecientes a distintos tipos de estructuras que se pueden ver en el ámbito constructivas (Belluzi, 1967). El trabajo ha sido sistematizado en dos partes diferenciados de forma que permita un mejor análisis, ya después se utiliza propiamente las funciones de Bessel. En la primera parte se analiza columnas sin fisura, donde se utiliza el planteamiento diferencial para calcular la carga crítica de pandeo de columnas con sección y rigidez constante, en seguida se realiza los cálculos por medio del método energético.

ESTRATEGIA METODOLÓGICA

El desarrollo en la parte teórica conceptual se apoya en el conocimiento matemático de las ecuaciones diferenciales aplicados a una situación concreta. En un primer momento la investigación es explicativa, sigue la secuencia análisis, síntesis y deducción. La metodología son estudios de casos (Stake, 2005). El análisis consiste en la búsqueda de la mayor precisión de elementos estructurales, donde los aspectos teóricos y la situación práctica se articulan con un conjunto de definiciones y teoremas que son guías en diferentes momentos del trabajo.

RESULTADOS

1. Caso de pandeo de columnas sin fisura: Método Diferencial

Tiene su base en la carga crítica de pandeo de Euler (Meek, 1971). Considerando todas las fuerzas y momento que actúan sobre la columna se obtiene una ecuación general, asumiendo el equilibrio en las distintas secciones. Después de aplicar las condiciones de contorno en la solución general dos cosas pasan: la carga crítica de pandeo y la ecuación exacta por el desplazamiento de la columna. Algunos conceptos que operacionaliza los términos:

Equilibrio: Estabilidad es una noción física y/o química asociada a la capacidad de un cuerpo de mantener su estado o su composición inalterados durante un tiempo relativamente prolongado (Euler, 1744).

Pandeo por flexión: Este tipo de inestabilidad resulta al aplicar una carga axial de compresión, de cierto valor, a un elemento estructural lineal. Tal carga axial puede combinarse con otros tipos de cargas como: cargas laterales, momentos extremos, entre otros, siendo el principal problema de la mayoría de las columnas estructurales (Euler, 1744).

Carga de pandeo: Manifestación del problema, al comprimir una columna lentamente, esta iniciará a deformarse según sus características plásticas y elásticas. Conforme se va aumentando la carga de forma progresiva, llegará el momento en que la barra manifieste una pequeña curvatura en su directriz. De este modo se alcanza la *carga de pandeo*, que marca la frontera entre el equilibrio estable y el inestable para la columna. Luego de producido la curvatura inicial de la barra, se generarán internamente momentos flectores debido a la excentricidad de la carga axial respecto de su directriz, el resultado es un aumento de la curvatura y nuevo incremento de los flectores, continua así, hasta que las tensiones soportadas por la barra lleguen a su límite y se rompa (Belluzi, 1967).

La columna ideal: Son las que cumplen las características:

- (a) No existe excentricidad de la carga respecto de la directriz de la barra; es decir, la carga axial a la que está sometida es centrada.
- (b) La barra no tiene curvatura inicial por fabricación, es perfectamente recta.
- (c) El material de la barra es isótropo y homogéneo.
- (d) No hay tensiones residuales en la barra desde su fabricación.

Características que son difícil de cumplir por cualquier columna real. Mientras tanto, es prudente estudiar en primer lugar el pandeo en elementos ideales, para después, ya conocidas las propiedades del fenómeno estudiar el caso de columna real. Cuando mencionamos columna ideal, se está refiriendo a carga de pandeo o carga de Euler, sin embargo, a la columna real se le asocia el término de carga crítica (Euler, 1744).

Teoría de la bifurcación del equilibrio: La columna ideal se estudia sobre la base de la teoría de la bifurcación del equilibrio, que señala, si en una barra ideal sometida a una carga axial de compresión, dicha carga aumenta, la barra sufre deformaciones por compresión en la dirección de la fuerza aplicada, estando el sistema en equilibrio estable; pero si se llega a un cierto valor de la carga axial (carga de pandeo), la barra inicia sufrir deformaciones en distintas direcciones a la fuerza aplicada (deformaciones no lineales), ingresando a una zona de equilibrio inestable. Las deformaciones lineales producidas

hacen que la barra se vaya curvando, originando momentos flectores que aumenta la curvatura y viceversa, hasta la rotura de la barra (Belluzi, 1967; Euler, 1744).

Punto de bifurcación de equilibrio: se refiere al punto de transición entre el estado pre-pandeo (equilibrio estable) y pos-pandeo (equilibrio inestable), es decir, el sistema se encuentra temporalmente en una situación de equilibrio neutro o indiferente.

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Tendremos en cuenta como hipótesis: (H1) se asume que los desplazamientos de las columnas sometidos a compresión son pequeños comparados con respecto de su longitud; (H2) se asume columnas esbeltas con directriz recta.

Sea una columna esbelta cuya sección es constante, no hay defecto en su superficie, sobre la cual se aplica una carga de compresión P , (Euler, 1744). Sea $q(x)$ la carga distribuida lateralmente que ocasiona un equilibrio inestable sobre la columna, y una deformación z en ese mismo sentido, y la aparición de un momento flector M en cada sección de la columna. Para una sección cualquiera de la columna, hay equilibrio de fuerzas y equilibrio de momento, respectivamente, entonces se tiene $\frac{dF}{dx} + q(x) = 0$, $F = -\frac{dM}{dx} - P\frac{dz}{dx}$, se establecen relaciones entre fuerzas y momento, $q(x) = \frac{d^2M}{dx^2} + P\frac{d^2z}{dx^2}$. Considerando la ecuación general de elasticidad, sin considerar cualquier efecto cortante, cuando se trata de columna de sección constante, $M = EI\frac{d^2z}{dx^2}$, donde EI es la rigidez de flexión de la columna, lo cual depende de la forma de la sección, reemplazando el momento flector,

$$q(x) = \frac{d^2}{dx^2} \left(E(x)I(x) \frac{d^2z}{dx^2} \right) + P \frac{d^2z}{dx^2}. \quad (1)$$

Haremos varias precisiones a la ecuación (1), para resolver esta ecuación diferencial, se supone que la carga distribuida es nula, $q(x) = 0$, mientras la rigidez a flexión se mantiene constante, $EI = \text{constante}$, en razón de que la sección no varía, por tanto, la ecuación diferencial de (1) se reduce a $EI\frac{d^4z}{dx^4} + P\frac{d^2z}{dx^2} = 0$, esta ecuación lo podemos adimensionalizar, considerando $y = \frac{x}{L}$, siendo L la longitud de la columna y δ es factor adimensional de pandeo que viene dado por $\delta^2 = \frac{PL^2}{EI}$,

entonces $\frac{d^4z}{dy^4} + \delta^2\frac{d^2z}{dy^2} = 0$, donde L es la longitud de la columna. Despejando la carga de compresión P tendremos la ecuación de la carga crítica de pandeo de Euler (Euler, 1744), cuando son calculados los valores de δ , la ecuación Euler sostiene que la carga crítica de

pandeo depende de la longitud de la columna, el material, su sección transversal y las condiciones de apoyo en los extremos (Calixto, 2002),

$$P_c = \frac{\delta^2 EI}{L^2} \quad (2)$$

la ecuación diferencial tiene como solución general

$$z(y) = c_1 \operatorname{sen}(\delta y) + c_2 \operatorname{cos}(\delta y) + c_3 y + c_4 \quad (3)$$

donde c_1, c_2, c_3 y c_4 son constantes arbitrarias. La ecuación (3) se utiliza para determinar un valor de δ , que se requiere en (2), para lo cual se aplica las condiciones de frontera.

ANÁLISIS DE CASOS EN DIFERENTES TIPOS DE COLUMNAS

En cada caso influye las condiciones de contorno o frontera que se obtienen de los extremos de la columna, calculamos la carga crítica de pandeo utilizando la ecuación de Euler para casos de columnas biapoyada, empotrada libre, empotrada simplemente apoyada, biempotrada, empotrada apoyo deslizante, para después contrastar con resultados preestablecidos.

Caso 1: columnas tipo biapoyada de longitud L sobre la cual se aplica una carga de compresión P . las condiciones de frontera son: tiene momento flector nulo, pues es un apoyo simple con desplazamiento nulo (Brauer, 1967), entonces $z(y) = 0$ y $z''(y) = 0$, ahora como $x = 0, x = L$, el apoyo superior $y = 0$ y apoyo inferior $y = 1$, las condiciones de frontera cumple $z(0) = 0, z''(0) = 0$ y $z(1) = 0$ y $z''(1) = 0$. Estas condiciones de frontera se aplican en la ecuación (3), buscamos soluciones no triviales,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}(\delta) & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}(\delta) & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

es decir, $\operatorname{sen}(\delta) = 0$, se busca solución no trivial, $\delta = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$, lo apropiado es $\delta = \pi$, ya en la expresión de la carga crítica de pandeo de Euler resulta $P_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$. Por tanto, la ecuación para el desplazamiento es $z(y)$ es $z(y) = c \operatorname{sen}(\pi y)$.

Caso 2: columna tipo empotrada libre, (Simitzes, 2006), si las condiciones de contorno se producen en el extremo libre, el momento flector nulo y esfuerzo cortante nulo, $z''(0) = 0$ y $z'''(0) + \delta^2 z'(0) = 0$. El empotramiento presenta desplazamiento nulo y giro nulo, luego $z(1) = 0$ y $z'(1) = 0$, buscamos soluciones no triviales,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\delta) & 0 & 0 & 1 \\ \text{cos}(\delta) & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

de donde, $\text{cos}(\delta) = 0$, para $\delta = \frac{(2n-1)\pi}{2}$ con $n \in \mathbb{Z}$, se tendría el primer modo de pandeo, y un valor de $\delta = \frac{\pi}{2}$, la carga crítica de pandeo de Euler resulta $P_c = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2}$, la ecuación para el desplazamiento es $z(y) = c \left(\text{sen} \left(\frac{\pi y}{2} \right) - 1 \right)$.

Caso 3: columna tipo empotrada – simple apoyada (Harrinson, 1980). Se considera las mismas condiciones de contorno para el apoyo y el empotramiento, combinamos los casos, extremo superior: desplazamiento nulo, momento flector nulo $z(0) = 0$ y $z''(0) = 0$; extremo inferior: desplazamiento nulo y giro nulo $z(1) = 0$ y $z'(1) = 0$, se busca soluciones no triviales,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\delta) & \text{cos}(\delta) & 1 & 0 \\ \delta \text{cos}(\delta) & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

de donde, $\tan(\delta) = \delta$, para $\delta \neq 0$ se obtiene $\delta = 1,43\pi$ que al reemplazar en la carga crítica de pandeo de Euler $P_c = \frac{\pi^2 EI}{(0,7L)^2}$. Por otro lado, $\delta = 1,43\pi$, genera dos ecuaciones desplazamiento $z_1(y) = c(\text{sen}(1,43\pi y) - y\text{sen}(1,43\pi))$ y $z_2(y) = c(\text{sen}(1,43\pi y) - 1,43\pi y \text{cos}(1,43\pi))$.

Caso 4: columna tipo biempotrada (Harrinson, 1980). Las condiciones de frontera que aparece en su empotramiento, tanto en la parte superior e inferior tiene desplazamiento nulo y giro nulo, $z(0) = 0$ y $z'(0) = 0$ y $z(1) = 0$ y $z'(1) = 0$, para soluciones no triviales,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \delta & 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\delta) & \text{cos}(\delta) & 1 & 1 \\ \delta \text{cos}(\delta) & -\delta \text{sen}(\delta) & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

de donde, $\delta \text{sen}(\delta) + 2\text{cos}(\delta) = 2$, una solución apropiada sería $\delta = 2\pi$, la carga crítica de pandeo de Euler, $P_c = \frac{\pi^2 EI}{(0,5L)^2}$, con ecuación de desplazamiento $z(y) = c(\text{cos}(2\pi y) - 1)$

Caso 5: columna tipo empotrada-apoyo deslizante (Simitzes, 2006). En este caso las condiciones de frontera que tiene los apoyos deslizantes son giros nulos y esfuerzo nulo,

$z'(0) = 0$ y $z'''(0) + \delta^2 z'(0) = 0$, mientras que los del empotramiento inferior, desplazamiento nulo y giro nulo, $z(1) = 0$ y $z'(1) = 0$, se aplica las fronteras,

$$\begin{vmatrix} \delta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cos(\delta) & 0 & 1 \\ 0 & \sin(\delta) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

donde $\sin(\delta) = 0$, en general resulta $\delta = n\pi$, se toma $\delta = \pi$, la carga crítica de pandeo de Euler, $P_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$, por tanto $z(y) = c(\cos(\pi y) + 1)$.

ESTUDIO DE LOS MISMO CASOS POR EL MÉTODO ENERGÉTICO

En este análisis utilizamos el método energético planteado por Timoshenko (1961), se aplica para calcular la carga crítica de pandeo con aproximaciones, es un método alternativo que se sustenta en el balance de energía y el trabajo realizado en el tiempo del proceso de deformación. La metodología consiste en estimar los desplazamientos asociados con el pandeo e igualar a la energía de deformación V_{int} con el trabajo que ha realizado la fuerza aplicada, V_{ext} , durante la deformación, donde $\Delta V_{int} = \Delta V_{ext}$.

El procedimiento consiste en determinar la ecuación de desplazamiento $z(x)$ de la columna que debe cumplir como mínimo las condiciones de frontera geométrica. Lo inconveniente del método, es que se trata de una aproximación y una elección apropiada de $z(x)$; de esta elección, más las condiciones establecidas, dependerá la menor o mayor exactitud de los resultados que esperamos; por tanto, a más exactitud de $z(x)$ los resultados serán más satisfactorias (Simitzes, 2006). En razón que cambios de energía se relacionan con el momento flector y el giro asociado a la estructura, entonces la energía

interna es $\Delta V_{int} = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left(\frac{d^2 z(x)}{dx^2} \right)^2 dx$, mientras que la energía externa es $\Delta V_{ext} = \frac{P_c}{2} \int_0^L \left(\frac{dz(x)}{dx} \right)^2 dx$, como interesa la carga crítica (ventura, 2004), entonces

$$P_c = \frac{\int_0^L EI(x) \left(\frac{d^2 z(x)}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^L \left(\frac{dz(x)}{dx} \right)^2 dx}.$$

Es posible deducir una fórmula que permita calcular δ , se adimensiona la expresión mediante el parámetro $y = \frac{x}{L}$, para $0 \leq x \leq L$ significa $0 \leq y \leq 1$, agregar EI_0 en la integral superior, así

$$P_c = \frac{EI_0}{L^2} \frac{\int_0^1 \frac{I(y)}{I_0} (z''(y))^2 dy}{\int_0^1 (z'(y))^2 dy}, \quad \frac{P_c L^2}{EI_0} = \frac{\int_0^1 \bar{I}(y) (z''(y))^2 dy}{\int_0^1 (z'(y))^2 dy}$$

como la carga crítica de pandeo es $\delta^2 = \frac{P_c L^2}{EI_0}$ que reemplazando se obtiene

$$\delta^2 = \frac{\int_0^1 \bar{I}(y)(z''(y))^2 dy}{\int_0^1 (z'(y))^2 dy} \quad (4)$$

es una ecuación que permite determinar el factor pandeo δ^2 , el siguiente paso es utilizar la expresión del desplazamiento $z(y)$, tal que satisfacen las condiciones de frontera geométrica.

Estudio de columnas de sección constante. Se trata de determinar el factor de pandeo sometido a diferentes condiciones de frontera, utilizamos la expresión $z(y)$, obtenidas para columnas no fisuradas (Simitzes, 2006). Para el caso de sección constante, una característica es el momento de inercia no varía, pues $I(y) = I_0$ en consecuencia $\bar{I}(y) = 1$, entonces la expresión del factor de pandeo δ^2 de (4) se escribe

$$\delta^2 = \frac{\int_0^1 (z''(y))^2 dy}{\int_0^L (z'(y))^2 dy}, \quad (5)$$

aplicando (5), obtendremos cálculos para cada caso de columnas sometidas a diferentes fronteras. **Caso 6:** columnas tipo biapoyada, se asume como ecuación de desplazamiento $z(y)$ obtenida por medio de un estudio diferencial $z(y) = c \operatorname{sen}(\pi y)$, en la ecuación (5)

$$\delta^2 = \frac{\int_0^1 (-\pi^2 c \operatorname{sen}(\pi y))^2 dy}{\int_0^1 (\pi c \cos(\pi y))^2 dy} = \pi^2$$

en consecuencia $\delta = \pi$, en la ecuación de la carga crítica de pandeo de Euler $P_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$.

Caso 7: columnas tipo empotrada-libre, la ecuación de desplazamiento corresponde al de una columna empotrada-libre $z(y) = c \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{2}\right) - 1 \right]$, en la ecuación (5) se tiene

$$\delta^2 = \frac{\int_0^1 \left(-\frac{\pi^2}{4} c \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{2}\right)\right)^2 dy}{\int_0^1 \left(\frac{\pi}{2} c \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right)\right)^2 dy} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Por tanto, para $\delta = \frac{\pi}{2}$, la ecuación de la carga crítica de pandeo de Euler es $P_c = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2}$.

Caso 8: columna tipo empotrada-simplemente apoyada, tiene dos ecuaciones diferentes para el desplazamiento $z_1(y) = c[\operatorname{sen}(1,43\pi y) - y \operatorname{sen}(1,43\pi)]$ reemplazando en (5),

$$\delta^2 = \frac{\int_0^1 [-(1,43\pi)^2 c \operatorname{sen}(1,43\pi y)]^2 dy}{\int_0^1 [c(1,43\pi \cos(1,43\pi y) - \operatorname{sen}(1,43\pi))]^2 dy},$$

tenemos un valor estimado $\delta = 1,43\pi$, en la ecuación de la carga pandeo de Euler es $P_c = \frac{\pi^2 EI}{(0,7L)^2}$.

Caso 9: columna tipo biempotrada. Para este caso, en la ecuación (5), aplicamos el desplazamiento $z(y) = c[\cos(2\pi y) - 1]$, entonces

$$\delta^2 = \frac{4\pi^2 \int_0^1 \cos^2(2\pi y) dy}{\int_0^1 \sin^2(2\pi y) dy} = \pi^2$$

de donde $\delta = 2\pi$; por tanto, la carga crítica de pandeo es $P_c = \frac{\pi^2 EI}{(0,5L)^2}$.

Caso 10: columna tipo empotrada-apoyo deslizante, la ecuación de desplazamiento es $z(y) = c[\cos(\pi y) + 1]$ reemplazando en la fórmula (5), el factor de pandeo,

$$\delta^2 = \frac{\pi^2 \int_0^1 \cos^2(\pi y) dy}{\int_0^1 \sin^2(\pi y) dy} = \pi^2$$

luego $\delta = \pi$; por tanto, la carga crítica de pandeo de Euler es $P_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$.

PANDEO DE COLUMNAS Y SOLUCIÓN POR FUNCIONES DE BESSEL

Ecuación diferencial de Bessel

Definición 1. La ecuación diferencial de Bessel se escribe

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - v^2)y(x) = 0, v > 0. \quad (6)$$

Construcción de soluciones. Se puede verificar que $x = 0$ es un punto singular regular (Kreider et al, 1996; Rey, 1958), y podemos proponer como solución $y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$, y la ecuación indicial asociada será $r^2 - v^2 = 0$, con $r = \pm v$, luego una primera solución es

$$y_1(x) = x^v \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m, v \geq 0.$$

Optamos por utilizar el Método de Frobenius para resolver (6), proponiendo como solución, $y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+v}$, la solución de la ecuación de Bessel de orden $v \geq 0$ se puede escribir en términos generales como $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m! (v+1)(v+2)\dots(v+m)} x^{2m+v}$, si

escogemos $a_0 = \frac{1}{2^v \Gamma(v+1)}$ tenemos la expresión

$$J_v(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(v+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+v},$$

es la *función de Bessel de orden v* de primera clase, la solución general de la ecuación Bessel se escribe $y(x) = c_1 J_v(x) + c_2 J_{-v}(x)$, en este caso contiene a v entero.

Ecuación de Bessel reducida

Rescatamos el rol que juega las funciones de Bessel para resolver problemas de valores en la frontera en pandeo de columnas empotradas en el suelo o en concreto armado. Muchas soluciones de otras ecuaciones diferenciales de segundo orden pueden ser

expresadas en términos de las funciones de Bessel, para una aplicación al pandeo de columnas, empezamos con la siguiente proposición (Bowman, 1958; Capela, 2005).

Proposición 1. Dada la ecuación diferencial de Bessel de orden ν ,

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2)w = 0$$

entonces la sustitución $w = \frac{y}{x^\alpha}$, $z = kx^\beta$, reduce la ecuación de Bessel a la forma:

$$x^2 y'' + Axy' + (B + Cx^q)y = 0$$

siendo A, B, C, q, α, k y β constantes reales.

Teorema 1. Sea la ecuación diferencial

$$x^2 y'' + Axy' + (B + Cx^q)y = 0. \quad (7)$$

Si $C > 0$, $(1 - A)^2 - 4B \geq 0$, $C > 0$, $q \neq 0$, entonces la solución general de la ecuación diferencial de (a) es $y(x) = x^\alpha [c_1 J_\nu(kx^\beta) + c_2 J_{-\nu}(kx^\beta)]$.

Corolario. Si $\nu \in \mathbb{Z}$, entonces la solución de la ecuación diferencial (7) es

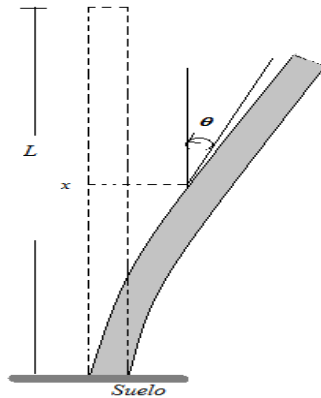
$$y(x) = x^\alpha [c_1 J_\nu(kx^\beta) + c_2 Y_\nu(kx^\beta)].$$

Formulación del problema de pandeo de una columna

Determinar cuándo se padea una columna vertical uniformemente bajo su propio peso (Gutiérrez, 2019; George, et al, 2006). Algunas consideraciones, para fijar ideas daremos una columna pandeada, figura 1. Tomemos $x = 0$ en el extremo superior libre de la columna y $x = L$ en su base, consideremos que la base está rígidamente empotrada en el suelo, podría ser también concreto armado. Para la formulación matemática, se asume que en el punto x , la desviación angular de la columna pandeada es $\theta(x)$, la teoría de elasticidad modela $EI \frac{d^2 \theta}{dx^2} + g\sigma x \theta = 0$, donde E es el módulo de Young, I es el momento de inercia de su sección transversal, σ expresa la densidad de la columna y g es la aceleración gravitacional, una condición de frontera apropiada para esta situación planteada es $\theta'(0) = 0$, $\theta(L) = 0$, se tiene un problema con valor de frontera,

$$\begin{cases} EI \frac{d^2 \theta}{dx^2} + g\sigma x \theta = 0 \\ \theta'(0) = 0, \theta(L) = 0 \end{cases}.$$

Figura 1*: Pandeamiento de una columna.



*Elaboración manual

Solución mediante funciones de Bessel

Lo que vamos a resolver es un problema con valores de frontera, entonces la ecuación diferencial $\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{g\sigma}{EI} x\theta = 0$, haciendo $r^2 = \frac{g\sigma}{EI}$ se tiene $\frac{d^2\theta}{dx^2} + r^2 x\theta = 0$, que se conoce como la *ecuación diferencial de Airy*. Multiplicamos en ambos miembros por x^2 ,

$x^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} + r^2 x^3\theta = 0$. Esta ecuación tiene la forma de la *ecuación reducida de Bessel* del

teorema 1, para identificarlo los coeficientes, lo expresamos en la forma $x^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} + 0 \cdot \frac{d\theta}{dx} +$

$(0 + r^2 x^3)\theta = 0$, teniendo en cuenta que los coeficientes son: $A = 0, B = 0, C = r^2$ y

$q = 3$, resultan $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{3}{2}, k = \frac{2}{3}r$ y $v = \frac{1}{3}$. Por el teorema 1, la solución general de

esta ecuación es

$$= x^{1/2} \left[c_1 J_{1/3} \left(\frac{2r}{3} x^{3/2} \right) + c_2 J_{-1/3} \left(\frac{2r}{3} x^{3/2} \right) \right]. \quad (8)$$

para determinar el valor de las constantes arbitrarias c_1 y c_2 se aplica las condiciones de

frontera; pero, antes tenemos el desarrollo en series de las funciones de Bessel $J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2r}{3} x^{\frac{3}{2}} \right)$

y $J_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2r}{3} x^{\frac{3}{2}} \right)$, de manera que

$$\theta(x) = c_1 \left(\frac{r}{3} \right)^{1/3} x \left[\frac{1}{\Gamma(\frac{4}{3})} - \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})} \left(\frac{r}{3} \right)^2 x^3 + \frac{1}{2\Gamma(\frac{10}{3})} \left(\frac{r}{3} \right)^4 x^6 - \frac{1}{3!\Gamma(\frac{13}{3})} \left(\frac{r}{3} \right)^6 x^9 + \dots \right] +$$

$$c_2 \left(\frac{r}{3} \right)^{-1/3} \left[\frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})} - \frac{1}{\Gamma(\frac{5}{3})} \left(\frac{r}{3} \right)^2 x^3 + \frac{1}{2\Gamma(\frac{8}{3})} \left(\frac{r}{3} \right)^4 x^6 - \frac{1}{3!\Gamma(\frac{11}{3})} \left(\frac{r}{3} \right)^6 x^9 + \dots \right]$$

Aplicando la condición de frontera $\theta'(0) = 0$, $c_1 = 0$, la solución se reduce

$$\theta(x) = c_2 \left(\frac{r}{3}\right)^{-1/3} \left[\frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})} - \frac{1}{\Gamma(\frac{5}{3})} \left(\frac{r}{3}\right)^2 x^3 + \frac{1}{2\Gamma(\frac{8}{3})} \left(\frac{r}{3}\right)^4 x^6 - \frac{1}{3!\Gamma(\frac{11}{3})} \left(\frac{r}{3}\right)^6 x^9 + \dots \right].$$

aplicamos la condición de frontera $\theta(L) = 0$, $0 = c_2 L^{1/2} J_{-1/3} \left(\frac{2r}{3} L^{3/2}\right)$, si la constante $c_2 \neq 0$ entonces obliga que se cumpla $J_{-1/3} \left(\frac{2r}{3} L^{3/2}\right) = 0$. Este resultado significa que $x = \frac{2r}{3} L^{3/2}$ es una raíz de la ecuación. Por tanto, la columna se pandea en esa posición x .

Entonces, procedemos calcular la longitud más corta, sea esa longitud L_1 , es decir $x = \frac{2r}{3} (L_1)^{3/2}$ y $L_1 = \left(\frac{3x}{2r}\right)^{2/3}$, pero se había hecho $r^2 = \frac{g\sigma}{EI}$, entonces $L_1 = \left(\frac{9x^2 EI}{4g\sigma}\right)^{1/3}$. En consecuencia, al tener una solución trivial, la columna se pandea bajo su propio peso en

$$L_1 = \sqrt[3]{\frac{9x^2 EI}{4g\sigma}}.$$

DISCUSIÓN

La discusión se centra en lo que sucede con el cambio a sección variable en la columna, el efecto que tiene, y determinar la carga crítica de pandeo cuando la columna es de sección variable sujeta a distintas condiciones de fronteras (Harrison, 1980). Sea una columna biapoyada de sección circular cuyo radio es variable conforme a la función $\rho(x)$. Se asume como momento de inercia en términos del radio adimensionado por $r(y)$, $I(y) = \frac{\pi[r(y)]^4}{4}$ donde $r(y) = d_0 \left(1 - \frac{y}{2}\right)$, luego $I(y) = \frac{\pi d_0^4}{4} \left(1 - \frac{y}{2}\right)^4$, para el momento de inercia de una columna está dado por $I_0 = \frac{\pi d_0^4}{4}$ y como, $\bar{I}(y) = \frac{I(y)}{I_0}$, entonces $\bar{I}(y) = \left(1 - \frac{y}{2}\right)^4$.

Para el análisis en columnas con sección variable se consideró el modelo de estructura cónica, se irá modificando las condiciones de contorno en ambos apoyos. Por tanto, la ecuación que permite obtener el valor del factor δ es,

$$\delta^2 = \frac{\int_0^1 \left(1 - \frac{y}{2}\right)^4 (z''(y))^2 dy}{\int_0^1 (z'(y))^2 dy} \quad (9)$$

Caso de columna biapoyada. Se aplica como función de desplazamiento $z(y) = c \operatorname{sen}(\pi y)$, con ajuste en (9), $\delta^2 = 2\pi^2 \int_0^1 \left(1 - \frac{y}{2}\right)^4 \operatorname{sen}^2(\pi y) dy$, donde $\delta = 0,5869\pi$, la carga de pandeo de Euler es $P_c = \frac{\pi^2 EI}{(1,7L)^2}$.

Caso de columna empotrada libre. Se toma la ecuación de desplazamiento (Harrinson, 1980), $z(y) = c \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{2}\right) - 1\right)$, en (9) da $\delta^2 = \frac{\pi^2}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{y}{2}\right)^4 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi y}{2}\right) dy$, con $\delta = 0,2269\pi$, y la carga de pandeo de Euler es $P_c = \frac{\pi^2 EI}{(4,41L)^2}$.

Caso de columna empotrada simple apoyada. Se toma como función de desplazamiento (Simitzes, 2006), $z_1(y) = c[\operatorname{sen}(1,43\pi y) - y \operatorname{sen}(1,43\pi)]$ en (9) resulta $\delta^2 = \frac{(1,43\pi)^4 \int_0^1 \left(1 - \frac{y}{2}\right)^4 \operatorname{sen}^2(1,43\pi y) dy}{\int_0^1 [(1,43\pi \cos(1,43\pi y) - \operatorname{sen}(1,43\pi))]^2 dy}$ con $\delta = 2,7537$, la carga de pandeo de Euler, $P_c = \frac{\pi^2 EI}{(1,14L)^2}$.

Caso de columna biempotrada. La ecuación de desplazamiento es $z(y) = c(\cos(2\pi y) - 1)$ en (9), $\delta^2 = 8\pi^2 \int_0^1 \left(1 - \frac{y}{2}\right)^4 \cos^2(2\pi y) dy$ con $\delta = 1,2632\pi$, la carga de pandeo de Euler (Harrinson, 1980), $P_c = \frac{\pi^2 EI}{(0,79L)^2}$.

Caso de columna empotrada apoyo deslizante. La ecuación de desplazamiento $z(y) = c(\cos(\pi y) + 1)$ en (9) $\delta^2 = 2\pi^2 \int_0^1 \left(1 - \frac{y}{2}\right)^4 \cos^2(\pi y) dy$, resulta $\delta = 0,6567\pi$, entonces la carga de pandeo de Euler (Harrinson, 1980), $P_c = \frac{\pi^2 EI}{(1,52L)^2}$.

CONCLUSIONES

El método de Timoshenco se utiliza cuando las estructuras a estudiar son más complejas, cuando se ha definidos la aparición de cambios de sección se verán reflejados en una variación del momento de inercia de la columna, el proceso previsto, resulta complejo, pues requiere de cálculo de muchas ecuaciones diferenciales.

El método energético, relaciona la energía de deformación con el trabajo realizado con la fuerza que provoca la inestabilidad, la desventaja es que el método proporciona una solución aproximada; sin embargo, permite calcular la carga crítica de pandeo en columnas que presentan cambio en su acción.

Los diferentes elementos que conforman una estructura al presentar inestabilidad, pueden ser por los materiales utilizados, tipos de cargas, formas de ligaduras, entre otras causas,

estos tipos de fallas se pueden evitar, utilizando funciones que mejor modelen estos fenómenos y el tipo de condiciones de fronteras que son apropiadas. Los resultados obtenidos traducen una metodología que permite estudiar de manera analítica, multitud de barras de inercia variable con diferentes condiciones de frontera.

Una apreciación importante, si la estructura se desplazada ligeramente de su posición de equilibrio por vibración, tensiones residuales impactos, acción de fuerzas, imperfecciones, entre otras causas, cuando cesa la perturbación volverá a recuperar su posición original. Hoy en día uno de los materiales de probada resistencia se convierte en un factor crucial en la estabilidad estructural, cabe reconocer, que la falta de información completa disponible respecto de cada fenómeno, provoca un dimensionamiento erróneo de una estructura y como consecuencia se tiene el colapso de la misma.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Belluzi O. (1967). *Ciencia de la construcción*. Madrid, Ed. Aguilar.
- Bowman F. (1958). *Introduction to Bessel Functions*. Ed. Dover.
- Birkhoff, G. y Rota C. (1969). *Ordinary Differential Equations*. New York: John Wiley.
- Braun M. (1983). *Differential Equations and Their Applications*. New York: Springer-Verlag.
- Brauer F. y Nohel J.A. (1967). *Ordinary Differential Equations*. New York: Benjamin.
- Brenner, J. L. (1966). *Problems in Differential Equations*. W.H. Freeman and Company, San Francisco and London.
- Calixto Molina M. (2002). *Ecuaciones diferenciales Ordinarias y Aplicaciones a la Ingeniería Civil*. Departamento de Matemática Aplicada y Estadística, Universidad Politécnica de Cartagena. Recuperado de: <https://repositorio.upct.es/bitstream/handle/10317/1219/edo.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.
- Capelas de Oliveira, Edmundo. (2005). *Funcoes Especiais com Aplicacoes*. Ed. Livraria da Física.
- Conte S. D y Deboor C. (1980). *Elementary Numerical Analysis*. New York: McGraw-Hill
- Churchill R. V. y Brown J. W. (1978). *Fourier Series and Boundary Value Problems*. New York, McGraw-Hill.

- Edwards, H., Penney Jr. y David E. (1993). *Ecuaciones Diferenciales Elementales*. México: Prentice Hall Hispanoamericana, S.A.
- Euler L. (1744). *De curvis elasticis*. Ed. Lausanne and Genova.
- George J. Simit y Dewey H. Hodges. (2006). *Fundamentals of Structural Stability*, Butterworth-Heinemann.
- Gutierrez Borda, A. E. (2019). *Ecuaciones diferenciales ordinarias I*. Ica, Gráfica Virgen de Guadalupe.
- Harrinson H. B. (1980). *Structural analysis and design*. Oxford, Ed. Pergamon.
- Leighton W. (1966). *Ordinary Differential Equations*. California, Wadsworth, Belmont.
- Kreider, Donald L., Kuller Roberto G., Ostberg, Donald R. y Perkins, Fred W. (1996). *Introducción al Análisis Lineal*, Vol II, Ed. Fondo Educativo Interamericano.
- Rey Pastor J. y Brzezicki A. C. (1958). *Funciones de Bessel, Teoría Matemática y aplicaciones a la Ciencia y la técnica*. Madrid, Ed. Dossat.
- Simitses G. J.; Hodges Dewey H. (2006). *Fundamentals of Structural Stability*. Escuela Daniel Guggenheim de Ingeniería Aeroespacial Instituto de Tecnología de Georgia.
- Stake R. E. (2005). *Investigación con estudios de casos*. Madrid, Morata.
- Strang, W.G (1980). *Linear Algebra and its Applications*. New York: Academic Press.
- Timoshenko S. P. y Gere J. M. (1961). *Theory of elastic stability*. New York, Ed. McGraw-Hill.
- Ventura B, J. y Elizarraraz M, D. (2004). *Ecuaciones diferenciales, técnicas solución y aplicaciones*. Primera edición, México: Unidad Azcapotzalco.