Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, Ciudad de México, México.
ISSN 2707-2207 / ISSN 2707-2215 (en línea), septiembre-octubre 2025,
Volumen 9, Número 5.

https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v9i5

APROXIMACIÓN DE VALORES DE LA FUNCIÓN SENO Y COSENO PARA ESTUDIANTES DE SEGUNDO AÑO DE INGENIERÍA

APPROXIMATION OF SINE AND COSINE FUNCTION VALUES FOR SECOND-YEAR ENGINEERING STUDENTS

Ramón Berber Palafox
Tecnológico Nacional de México

Jesús González Briones
Tecnológico Nacional de México

Iliana Dessiré Hernández Trujillo
Tecnológico Nacional de México

Humberto Carlos Salgado Rosales
Tecnológico Nacional de México

DOI: https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v9i5.20191

Aproximación de Valores de la Función Seno y Coseno para Estudiantes de Segundo Año de Ingeniería

Ramón Berber Palafox[1]
rberberp@toluca.tecnm.mx
https://orcid.org/0009-0000-8701-1359
Tecnológico Nacional de México
Instituto Tecnológico de Toluca
México

Jesús González Briones
jgonzalezb@toluca.tecnm.mx
https://orcid.org/0009-0006-8834-2102
Tecnológico Nacional de México
Instituto Tecnológico de Toluca
México

Iliana Dessiré Hernández Trujillo
Ilieana.ht@veracruz.tecnm.mx
https://orcid.org/0009-0001-5507-8150
Tecnológico Nacional de México
Instituto Tecnológico de Veracruz
México

Humberto Carlos Salgado Rosales
hsalgador@toluca.tecnm.mx
https://orcid.org/0009-0003-5345-1980
Tecnológico Nacional de México
Instituto Tecnológico de Toluca
México

RESUMEN

Como profesores adscritos al departamento de ciencias básicas y ciencias económico administrativas del Tecnológico Nacional de México, y basado en la experiencia docente en las áreas de ingeniería, se describe en esta publicación, una propuesta práctica para profesores y estudiantes del segundo año de estudios en las ingenierías impartidas por el Tecnológico Nacional de México, cuya intención es incrementar la competencia de capacidad de análisis, razonamiento aritmético y razonamiento lógico en los estudiantes. En este trabajo se presenta un método para aproximar los valores de la función seno y coseno, mediante interpolación de Lagrange. Por otro lado, se presentan algunas aplicaciones de las funciones seno y coseno para trazar gráficas en coordenadas polares.

Palabras clave: ingeniería, aritmética, cálculo, gráficas, seno

[1] Autor principal
Correspondencia: rberberp@toluca.tecnm.mx

Approximation of Sine and Cosine Function Values for Second-Year Engineering Students

ABSTRACT

As professors attached to the Department of Basic Sciences and Economic and Administrative Sciences of the National Institute of Technology of Mexico, and based on our teaching experience in the areas of engineering, we describe in this publication a practical proposal for professors and students of the second year of studies in the engineering programs taught at the National Institute of Technology of Mexico. The aim of this proposal is to increase students' analytical skills, arithmetic reasoning, and logical reasoning. This work presents a method for approximating the values of the sine and cosine functions using Lagrange interpolation. Additionally, some applications of the sine and cosine functions for graphing in polar coordinates are presented.

Keywords: engineering, arithmetic, calculus, graphs, sine

Artículo recibido 22 agosto 2025
Aceptado para publicación: 25 setiembre 2025

INTRODUCCIÓN

La asignatura de cálculo vectorial se estudia en segundo año en la mayoría de las carreras de ingeniería del Instituto Tecnológico de Toluca. Las funciones seno y coseno son ampliamente utilizadas a través de los diversos ejemplos que estudiamos durante todo el curso.

La competencia específica del tema dos es**:**

"Establece ecuaciones de curvas planas, en coordenadas rectangulares, polares, o en forma paramétrica, para brindarle herramientas necesarias para el estudio de curvas más sofisticadas."

Asimismo, las competencias genéricas son**:** Capacidad de abstracción, análisis y síntesis. Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas. Capacidad de aprender y actualizarse permanentemente. Capacidad de trabajo en equipo. (TecNM, 2016, p. 7).

Literatura Relacionada

El surgimiento de la noción de función como entidad matemática individualizada se remonta a los inicios del cálculo infinitesimal. Descartes (1596-1650) afirmó claramente que una ecuación con dos variables, representada geométricamente por una curva, indica una dependencia entre magnitudes variables. (Ponte, 2012, p. 2).

Fue Leibniz quien utilizó por primera vez el término «función» en 1694 (Larson, 2023, p. 57). Entendió que «función» designaba, en términos muy generales, la dependencia de magnitudes geométricas como las subtangentes y las subnormales con respecto a la forma de una curva. También introdujo los términos «constante», «variable» y «parámetro». (Ponte, 2012, p. 2).

En su investigación, Daher, (2020) estudió el aprendizaje de los estudiantes de secundaria de las realizaciones y narrativas trigonométricas, usando tecnología, específicamente GeoGebra. Haciendo eso, utilizó el marco comognitivo (Sfard, 2007, 2008). Este marco permite abordar los significados de las tres funciones trigonométricas y la transición de los estudiantes de un significado a otro. (p. 2).

Demir (2012) encontró que GeoGebra puede facilitar a los estudiantes la conexión entre los tres contextos de funciones trigonométricas: los triángulos rectángulos, el círculo unitario y la gráfica de la función. Kissane y Kemp (2009) exploraron el potencial de la tecnología, específicamente, la calculadora de gráficas, para ayudar a los estudiantes a hacer conexiones entre trigonometría y funciones circulares.

Reportaron que la tecnología facilitó a los estudiantes la exploración de narrativas relacionadas a gráficas trigonométricas, como aquellas relacionadas a su periodicidad, amplitud, puntos máximos y mínimos y sus ceros, adicionalmente a aquellas relacionadas a identidades trigonométricas y ecuaciones. (Daher, 2020, p. 1).

Los mediadores visuales son objetos y recursos visuales que los participantes en un discurso matemáticos utilizan para identificar ideas matemáticas y coordinar su comunicación de aprendizaje. Estos mediadores incluyen símbolos como numerales, letras algebraicas y entidades representativas como tablas, gráficos y diagramas. Los mediadores se utilizan para pensar o comunicarse en un discurso matemático (Sfad, 2008). Por otro lado, GeoGebra proporciona un contexto donde es fácil producir mediadores visuales mediante la representación gráfica de diversas funciones (Berger, 2013). (Daher, 2020, p. 2).

Demir y Heck (2013) describen la trigonometría como una importante materia en educación matemática de secundaria y subsecuentes, donde el currículo de trigonometría es distribuido en varios años de escuela. Este currículo incluye la introducción de seno, coseno y tangente como funciones de un ángulo, ya sea a través de utilizar triángulos rectángulos o el círculo unitario o como funciones de un número real. (Daher, 2020, p. 4).

Una referencia importante a las aproximaciones numéricas la encontramos en Serway y Jewett(2008), ejercicio 52:

"En física es importante usar aproximaciones matemáticas. Demuestre que, para ángulos pequeños (<20°), $\tan\alpha \approx sen\,\alpha \approx \alpha = \frac{\pi}{180°}\alpha'$. Donde α está en radianes, y α' en grados" (Serway y Jewett, 2008, p. 17).

En una investigación realizada en 2016, Downs et al, mostraron a través de actividades prácticas de matemáticas para el aula, con un amplio conjunto de datos científicos de acceso público, para el alumnado de 9º y 10º de educación secundaria. Las actividades introducen y profundizan la comprensión del cálculo integral y las funciones trigonométricas mediante la presentación de problemas prácticos centrados en la salud pública y el desarrollo de una comprensión personal de la radiación ultravioleta solar y el índice UV. (p. 179).

Por otra parte, el currículo nacional australiano de matemáticas introduce las razones trigonométricas como parte del área de Medición y Geometría en 9º y 10º curso (ACARA, 2015). Dependiendo del progreso de cada escuela y la edad de los estudiantes participantes, las razones trigonométricas eran un concepto relativamente nuevo para aproximadamente la mitad de los estudiantes del programa de Enriquecimiento de Matemáticas. Por lo tanto, tras el cálculo exitoso del UVI en grupo, se introdujo a los estudiantes al significado de la razón seno como razón de las longitudes de los lados calculadas a partir de triángulos rectángulos semejantes. La importancia de la razón seno se ilustró mediante el análisis del posible efecto de las componentes vertical y horizontal de la trayectoria atmosférica en cualquier haz de luz solar incidente. (Downs et al, 2016, p. 186).

Los modelos estudiantiles consideraron la importancia de la amplitud de la función seno periódica. Los estudiantes que participaron en la actividad de Enriquecimiento de Matemáticas calcularon la razón seno de cada ángulo de elevación solar del este y graficaron el resultado para cada hora de medición de la irradiancia UV espectral: 6:00 a. m., 8:00 a. m., 10:00 a. m., 12:00 p. m., 2:00 p. m., 4:00 p. m. y 6:00 p. m. El modelo se mejoró incrementando la amplitud de la función mediante la multiplicación de un factor de escala adecuado. (Downs et al, 2016, p. 186).

En 2022, Gholami realizó una investigación de tipo cualitativo, cuyo objetivo es presentar el Estudio de Lecciones como un nuevo método de enseñanza basado en la resolución de problemas para mejorar el rendimiento del profesorado en la enseñanza de trigonometría. En este estudio, un grupo de tres profesores de matemáticas de un centro preuniversitario internacional en Malasia y el investigador contribuyeron a la preparación de una lección de investigación sobre los valores máximos y mínimos de una función trigonométrica. Este artículo podría ayudar a los educadores de matemáticas a mejorar su rendimiento en la enseñanza de trigonometría mediante el Estudio de Lecciones basado en la resolución de problemas. (p. 26). En la enseñanza de la trigonometría, la mayoría de los conceptos erróneos surgen del método de enseñanza. Por ejemplo, como identificó Tuna (2013), cerca del 90% de los profesores de matemáticas noveles tenían conceptos erróneos sobre la definición del concepto trigonométrico radián. Por lo tanto, los educadores de matemáticas, además de un conocimiento adecuado de la materia, necesitan conocer los malentendidos y conceptos erróneos comunes que enfrentan los estudiantes en un tema específico. (Gholami, 2022, p. 27).

Siendo una de las asignaturas principales del currículo de matemáticas de secundaria, la trigonometría vincula el razonamiento algebraico, geométrico y gráfico. Kepceoglu y Yavuz, en 2016, realizaron una investigación cuyo objetivo era investigar el efecto de GeoGebra en la enseñanza del concepto de periodicidad de las funciones trigonométricas. En este estudio, se investigó la eficacia del software matemático dinámico GeoGebra, utilizado en la enseñanza de la periodicidad de las funciones trigonométricas, la cual se enseña mediante fórmulas en el contexto de la educación matemática tradicional. (p. 573).

En la literatura sobre educación matemática, la trigonometría se considera una de las materias difíciles en las que los estudiantes experimentan dificultades de aprendizaje y numerosas investigaciones han revelado conceptos erróneos de los estudiantes sobre la trigonometría (Doğan y Şenay, 2000; Según Ross et al. (2011), una comprensión profunda de la trigonometría requiere la capacidad de alternar entre representaciones abstractas, visuales y concretas de objetos matemáticos, y los estudiantes están particularmente discapacitados por su incapacidad para formular y transponer expresiones algebraicas. (Kepceoglu y Yavuz, 2016, p. 574).

Se utiliza un diseño cuasi experimental con un grupo de control de post-prueba dividido aleatoriamente (como si se cambiara de aula). Dado que los participantes del estudio aún no han visto el tema "periodicidad de la función trigonométrica", su nivel de conocimiento sobre este tema se considera igual. Por lo tanto, se ha elegido el modelo de grupo de control de post-prueba. En este modelo, no se requiere una prueba previa. (Kepceoglu y Yavuz, 2016, p. 575).

Maknun et al, en 2020 realizaron un estudio, en donde se propone un diseño didáctico para comprender las propiedades de las funciones trigonométricas. Partimos del dibujo de la gráfica y analizamos cada una de ellas. Utilizamos la gráfica de la función trigonométrica como medio para analizar la función, como su valor trigonométrico, máximo y mínimo, período e intervalo de crecimiento o decrecimiento. Los dos objetivos principales de ese estudio son: 1) Cómo se utiliza el círculo unitario para dibujar la gráfica de una función trigonométrica, y 2) Cómo se puede utilizar la gráfica de una función trigonométrica para analizar sus propiedades. (p. 1).

El concepto de trigonometría como función se había pasado por alto y los estudiantes tenían una comprensión limitada al respecto; por ejemplo, a los estudiantes les resulta difícil reconocer en qué rango la función seno y coseno disminuye o aumenta (Kamber y Takaci, 2017; Weber, 2008), mientras que conocer este concepto podría ayudarlos a dominar el límite, el diferencial y la integral de la trigonometría. (Maknun et al, 2020, p. 2).

Los obstáculos epistemológicos se enfatizan en la educación matemática. Los estudiantes a menudo tienen un contexto de conocimiento limitado para comprender la trigonometría. Conocer este obstáculo epistemológico puede ayudar al profesor a comprender las ideas erróneas del estudiante. Por lo tanto, este estudio tuvo como objetivo identificar los obstáculos epistemológicos de los estudiantes en relación con la trigonometría y la función trigonométrica. (Maknun et al, 2022, p. 2).

Un error se puede identificar al ver el resultado del trabajo de los estudiantes. Por ejemplo, en la investigación de Kamber y Takaci (2017), un estudiante implementa una de las propiedades $sen(mx) = msen(x)$ para determinar el valor de sen(270°). El estudiante obtiene el resultado: $sen(270°) = sen\big(3(90°)\big) = 3sen(90°)$. Tal vez el estudiante sabe que la propiedad es correcta en álgebra, por lo que aplica la ecuación para determinar los otros valores de seno de los ángulos. Al analizar este error, surgen preguntas (¿Los estudiantes no entienden cómo encontrar valores trigonométricos? ¿Los estudiantes usan los conceptos equivocados? ¿Los estudiantes confunden la comprensión del álgebra y la trigonometría? ¿Los estudiantes entienden el significado de seno? ¿Los errores ocurren debido al conocimiento previo de los estudiantes u ocurren durante el proceso de aprendizaje?). Con seguridad, cada estudiante tiene razones o argumentos que respaldan la respuesta. El estudiante utiliza un concepto en un contexto particular y lo aplica a otro (Brousseau, 2002). (Maknun et al., 2022, p. 6).

Significado y comprensión son nociones didácticas apropiadas para trabajar la comprensión de conceptos, el diseño curricular y la evaluación de conocimientos. Este documento busca profundizar en el significado de los conceptos matemáticos escolares mediante su análisis semántico. Este análisis se utiliza para identificar y establecer el significado básico de un concepto matemático y valorar su comprensión. Para ilustrar el estudio, se han seleccionado las nociones trigonométricas de seno y coseno de un ángulo. El trabajo ejemplifica algunos hallazgos de un estudio exploratorio realizado con estudiantes de secundaria de entre 16 y 17 años. (Martín et al, 2019, p. 1).

La trigonometría es un tema significativo e integrador en el currículo de matemáticas de la escuela preparatoria debido a su relevancia en el pensamiento matemático avanzado. Es un pilar no solo para las matemáticas avanzadas, sino también para la física, la geometría y la mecánica. Es "la condición previa para comprender conceptos más avanzados y es necesaria para la formación de un lenguaje matemático" (Dündar, 2015: 1380). De hecho, la trigonometría se encuentra dentro del área de contenido de geometría en los Estándares Estatales Básicos Comunes de Matemáticas (Centro de Mejores Prácticas de la Asociación Nacional de Gobernadores, 2010). De tal relevancia se desprende que los estudiantes deberían ser capaces de construir conceptos y procedimientos trigonométricos significativos, esenciales para sus experiencias de aprendizaje. La trigonometría también es una parte de las matemáticas que es difícil de entender para los estudiantes. (Dündar, 2015). (Martín et al, 2019, p. 1).

Comprender un contenido matemático en profundidad implica dotar de significado coherente sus conceptos y realizar sus procedimientos, "comprender algo significa asimilarlo a un esquema apropiado" (Skemp, 1987: 29). Comprender los contenidos matemáticos es un objetivo importante en la educación matemática. Este estudio forma parte de un proyecto de investigación sobre el significado de los conceptos matemáticos escolares y su comprensión. Trabajos anteriores han examinado el significado de otros conceptos matemáticos (Castro-Rodríguez et al., 2016; Fernández-Plaza et al., 2013). Este artículo presenta un estudio descriptivo que se centra en los significados que un grupo de estudiantes españoles de Educación Secundaria No Obligatoria (16-17 años) asocia con las nociones de seno y coseno. (Yigit Koyunkaya, 2016: 1). (Martín et al, 2019, p. 2).

Como se ha afirmado, comprender un contenido matemático implica dotar de significado estructurado a sus conceptos y procedimientos. Identificar y caracterizar los significados expresados por un grupo de estudiantes sobre algún contenido matemático no es tarea fácil en la educación matemática. Se han desarrollado parcialmente enfoques teóricos y metodológicos. Existen varias propuestas para investigar cómo dotar de significado a un contenido matemático, en las que se utiliza un marco de tres categorías semánticas (p. ej., Biehler, 2005; Radford, 2003; Sáenz-Ludlow, 2003; Steinbring, 2006; Vergnaud, 1990).

Estas tríadas caracterizan aspectos del conocimiento matemático y, al mismo tiempo, pueden utilizarse como herramientas metodológicas para analizar el significado de los contenidos matemáticos y su comprensión relacionada (Steinbring, 1998: 172). (Martín et al, 2019, p. 2).

Establecer conexiones entre las representaciones de funciones trigonométricas y la interpretación de sus gráficas es un gran desafío para muchos estudiantes. Este estudio explora la efectividad de GeoGebra en el éxito de estudiantes de 12° grado en establecer conexiones entre las representaciones de funciones trigonométricas y la interpretación de gráficas. Se utilizó un diseño cuasiexperimental con grupo control no equivalente (pre-test-postest). La muestra del estudio consistió en sesenta y un estudiantes de 12º grado de dos escuelas. Los resultados mostraron una diferencia estadísticamente significativa entre los logros promedio del grupo experimental y el grupo control en la creación de conexiones entre representaciones de funciones trigonométricas, así como en el análisis e interpretación de dichas representaciones, a favor del grupo experimental. Este estudio amplía los hallazgos de estudios previos sobre la efectividad del software de matemáticas dinámicas en el aprendizaje de las representaciones y la interpretación de gráficas de funciones trigonométricas por parte de los estudiantes. (Mosese y Ogbonnaya, 2021, p. 827).

Este estudio es significativo por dos razones principales. En primer lugar, se inspiró en la necesidad de encontrar un enfoque alternativo para la enseñanza de las matemáticas con el fin de mejorar el rendimiento de los estudiantes. El sector educativo se encuentra bajo presión para encontrar maneras de mejorar los resultados de aprendizaje en habilidades escasas como las matemáticas, la ciencia y la tecnología. Por lo tanto, este estudio tuvo como objetivo evaluar la posible influencia de GeoGebra en la enseñanza y el aprendizaje de las funciones trigonométricas. En segundo lugar, solo unos pocos estudios han evaluado la eficacia del uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en la enseñanza y el aprendizaje de las funciones trigonométricas, aunque a menudo se ha descrito como un tema difícil para los estudiantes (Brown, 2005; Demir, 2012; Weber, 2005). (Mosese y Ogbonnaya, 2021, p. 828).

Este estudio examinó la oportunidad de aprender transformaciones de funciones que ofrecen las aplicaciones de GeoGebra disponibles en el sitio web de GeoGebra.

Nuestro análisis se centró en las funciones y sus representaciones, mediante las cuales se exploran las transformaciones en estas aplicaciones, los efectos y componentes de las transformaciones que estas aplicaciones permiten a los estudiantes aprender, y el andamiaje que ofrecen. Los resultados muestran que las transformaciones de funciones en las aplicaciones de GeoGebra se exploran a menudo en el contexto de familias de funciones (p. ej., funciones cuadráticas y trigonométricas) que utilizan representaciones específicas (p. ej., gráficas y simbólicas). (Yao y Grande, 2023, p. 326).

Cuando los estudiantes no alcanzan objetivos de aprendizaje específicos, cabe preguntarse si han recibido la experiencia de aprendizaje que les permite desarrollar las competencias expresadas en estos objetivos. Por lo tanto, parece natural que los investigadores introduzcan el concepto de oportunidad de aprender (OTL). De hecho, este concepto fue acuñado por Carroll (1963) al referirse al tiempo suficiente para que los estudiantes aprendan (Walkowiak, Pinter y Berry, 2017). Desde entonces, la noción de OAD se ha interpretado desde múltiples perspectivas teóricas, centrándose en el diseño cognitivo, curricular y de evaluación, las dimensiones sociales o afectivas del aprendizaje, las cuestiones de equidad y acceso, o los amplios contextos políticos y de políticas del aprendizaje y la enseñanza (Goos, 2014). (Yao y Grande, 2023, p. 326).

En este artículo de Weber se investiga la comprensión de las funciones trigonométricas por parte de los estudiantes en el contexto de dos cursos universitarios de trigonometría. El primer curso fue impartido por un profesor independiente del estudio en un formato teórico, mientras que el segundo se impartió mediante un paradigma de instrucción experimental basado en la noción de precepto de Gray y Tall (1994) y las teorías actuales del aprendizaje proceso-objeto. Mediante entrevistas y una prueba de papel y lápiz, examiné la comprensión de las funciones trigonométricas por parte de los estudiantes de ambas clases. Los resultados indican que los estudiantes que recibieron instrucción teórica desarrollaron una comprensión muy limitada de estas funciones. Los estudiantes que recibieron instrucción experimental desarrollaron una comprensión profunda de las funciones trigonométricas (Weber, 2005, p. 91).

Existe un amplio consenso entre los investigadores en educación matemática en cuanto a que el objetivo de los cursos de matemáticas no es solo que los estudiantes memoricen procedimientos y adquieran métodos fiables para obtener soluciones correctas en ejercicios de papel y lápiz; Más bien, los estudiantes deberían aprender matemáticas con comprensión (p. ej., Davis, 1992; Consejo Nacional de

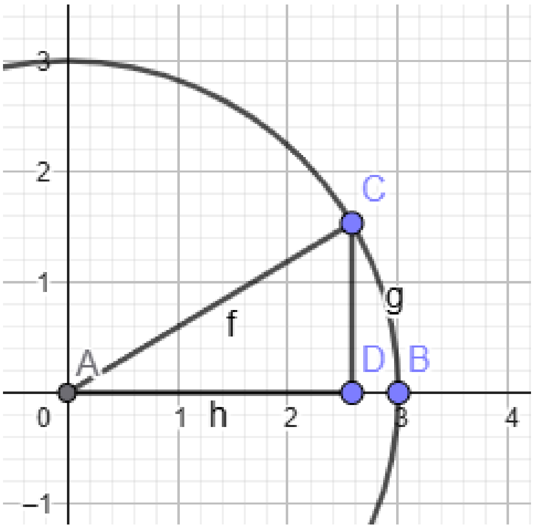
Profesores de Matemáticas [NCTM], 2000; Skemp, 1987). En particular, los estudiantes deberían ser capaces de explicar por qué los procedimientos que aplican son matemáticamente apropiados y justificar por qué los conceptos matemáticos tienen las propiedades que tienen (cf. Skemp, 1987). (Weber, 2005, p. 92).

DESARROLLO

Definiciones de la función seno.

Definición 1. En la escuela secundaria y en nivel bachillerato aprendemos en trigonometría que el seno y el coseno de un ángulo α de un triángulo rectángulo se definen como la razón entre el cateto opuesto a dicho ángulo y la hipotenusa; la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa. (Baldor, 1983, p. 305). Ver figura 1.

Figura 1. Triángulo rectángulo. Definición de seno.



GeoGebra.org. Elaboración propia

$$sen(\alpha) = \frac{cateto\ \ opuesto}{hipotenusa} = \frac{CD}{AC}, \qquad cos(\alpha) = \frac{cateto\ \ adyacente}{hipotenusa} = \frac{AD}{AC}$$

Definición 2. La función seno puede definirse mediante un problema de valor inicial, que consiste en una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con valores iniciales para la función solución. (Ibarra, 2010, p. 103).

$$x'' + x = 0, \qquad x(0) = 1, \qquad x'(0) = 1$$

entonces su solución es

$$x(t) = sen(t) + \cos(t).$$

Definición 3. Como serie de Taylor, o más precisamente, serie de Maclaurin. (Larson, 2018, p. 329).

$$sen\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\; x^{2n}}{(2n)!}$$

Definición 4. Para una definición formal y rigurosa recurrimos a (Spivak, 1981, p. 388).

Si $0 \leq x \leq \pi$, entonces $\cos x$ es el único número de $[-1, 1]$ tal que

$$A(\cos x) = \frac{x}{2}; \quad y \quad sen\, x = \sqrt{1 - (\cos x)^2}$$

A: representa el área de un sector bajo el círculo unitario para un valor de x. Montiel (2005) realiza la exposición desde la página 35 hasta la 53.

Definición 5. Dado un número complejo z, definimos (Apostol, 1964, p. 18)

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

En donde,

$$e^{iz} = e^{z}(\cos z + i\, sen\, z)$$

Nota. La definición también es consistente con esta última ecuación cuando z es real.

(Spivak, 1981) utiliza de la página 382, empezando con definir un ángulo, a la página 388 para llegar a la definición de sen x y cos x, después de exponer temas de cálculo diferencial y de cálculo integral. Mientras que (Apostol, 1964) solo ocupa dos renglones. En el primer caso observamos el rigor matemático llevado hasta su más alto nivel.

Propiedades de la función seno y coseno

1) el seno es una función impar, y el coseno es función par, es decir:

$$sen(-x) = -sen(x), \qquad \cos(-x) = \cos(x).$$

2) el seno y el coseno son funciones periódicas de periodo 2π,

$$sen(x) = sen(x + 2k\pi), \qquad cos(x) = cos(x + 2k\pi), \qquad k \in Z$$

3) para la función seno y coseno: (Purcell, 2007, p. 44). (Zill, 2011, p. 52).

$$a\, sen(bx + c), \qquad a \cos\,(bx + c)$$

$$la\ amplitud\ es\ a, el\ periodo\ es \frac{2\pi}{b}, \qquad el\ desplazamiento\ en\ el\ eje\ x\ es\ c.$$

4) la curva del coseno es la curva del seno desplazada $\frac{\pi}{2}$ a la izquierda.

$$sen(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Generalizando,

$$sen(x) = \cos\left(x + (4k+1)\frac{\pi}{2}\right), \qquad k \in Z$$

5) $sen^2(x) + \cos^2(x) = 1$. (Baldor, 1983, p. 329).

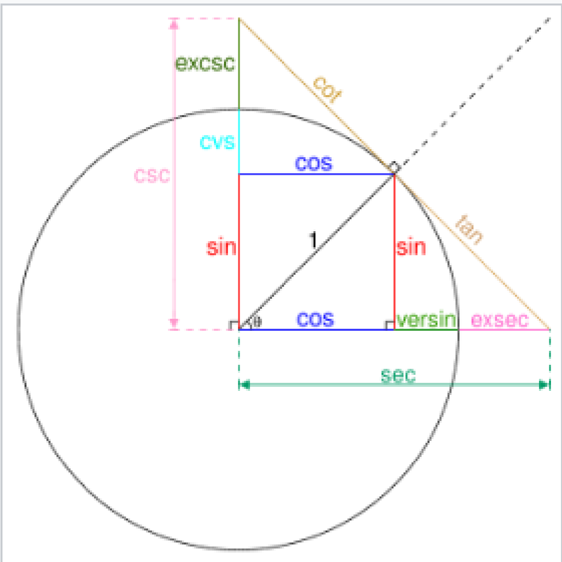
6) Las funciones $sen(x)$ y $\cos{(x)}$ son funciones continuas en todo su dominio, el conjunto de todos los números reales.

7) Un uso intensivo de las funciones seno y coseno lo hizo Joseph Fourier al publicar su teoría de series de Fourier, para aproximar funciones, cuando estudiaba la ecuación del calor entre 1807 y 1811.

Partiendo de las funciones seno y coseno podemos definir otras funciones. Ver figura 2.

$$\tan x = \frac{sen\ x}{\cos x}, \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{sen\ x}, \sec x = \frac{1}{\cos x}, \csc x = \frac{1}{sen\ x}$$

Figura 2. Las funciones trigonométricas.



Todas las funciones trigonométricas de un ángulo θ pueden ser construidas geométricamente en relación a una circunferencia de radio unidad de centro *O*

Fuente: Wikipedia (2025).

Breve historia de la función seno

En Egipto y Babilonia, alrededor de 2000 a.C., se observan los primeros indicios de trigonometría en la práctica. Estas civilizaciones utilizaban tablas de cuerdas y principios de triángulos semejantes para la construcción y la agricultura. Por ejemplo, los babilonios dividieron el círculo en 360 grados, un sistema que aún se utiliza en la actualidad. (NEM, s.f.).

Los griegos, particularmente en el periodo clásico, realizaron importantes avances en la trigonometría. Un matemático destacado fue Hiparco, considerado el padre de la trigonometría, quien elaboró tablas de cuerdas, que son una forma primitiva de las funciones trigonométricas que conocemos hoy. Su trabajo sentó las bases para otros matemáticos como Ptolomeo, cuyas contribuciones se enfocaron en la relación entre los ángulos y dimensiones de figuras geométricas. Durante este periodo, se formalizaron las definiciones de seno y coseno. (NEM, s.f.).

En la India, matemáticos como Aryabhata y Brahmagupta también hicieron importantes contribuciones a la trigonometría; introdujeron un estudio más sistemático sobre las funciones trigonométricas. Posteriormente, En el entorno islámico, figuras como Al-Khwarizmi y Al-Battani expandieron el conocimiento al traducir y desarrollar conceptos trigonométricos de griegos y de las enseñanzas indias, estableciendo así una rica tradición que influiría en la Europa medieval. (NEM, s.f.).

Cálculos manuales

Continuando con la idea de disminuir la utilización de la calculadora en el aula de clases, proponemos un método para aproximar los valores de la función seno. El método que proponemos es la interpolación lineal de Lagrange. Los valores de la función seno que generalmente utilizamos en los ejemplos, ya sea de matemáticas o de física, son 0, 30°, 45°, 60° y 90°. Los cuales se utilizan más frecuentemente y ya los tenemos memorizados. Ver tabla 1.

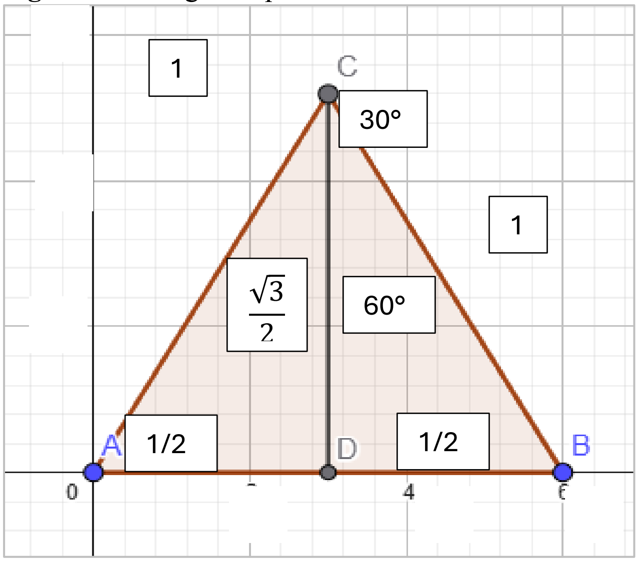
Tabla 1. Valores más utilizados de la función seno y coseno.

	0°	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
Sen(x)	0	0.5	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
Cos(x)	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	0.5	0

Fuente elaboración propia, 2025

Estos valores los podemos obtener de una tabla, de una calculadora o construyendo un triángulo rectángulo isósceles de catetos igual a 1, calculamos el valor de $sen(45°)$. Dibujando un triángulo equilátero de lado 1 podemos calcular $sen(60°)$, al dividir el triángulo en dos triángulos iguales, cuyos lados serían: hipotenusa igual a 1, un cateto igual a 0.5 y el otro $\sqrt{1^2 - 0.5^2} = \sqrt{3}/2$; también podemos calcular $sen(30°)$ en ese mismo dibujo. Al mismo tiempo que podemos calcular valores de la función seno también calculamos los valores de la función coseno. (Baldor, 1983, p. 311). Ver figura 3.

Figura 3. Triángulo equilátero de lado 1.



Fuente: GeoGebra.org. Elaboración propia, 2025.

Para mejorar las aproximaciones agregamos los valores de 15° y 75°, los cuales se toman de una calculadora. Ver tabla 2 y 3.

Tabla 2. Valores de la función seno y coseno.

	0°	**15°**	**30°**	**45°**	**60°**	**75°**	**90°**
Sen(x)	0	0.2588	0.5	0.7071	0.866	0.9659	1
Cos(x)	1	0.9659	0.866	0.7071	0.5	0.2588	0

Fuente elaboración propia, 2025

Como se van a trabajar aproximaciones y operaciones a mano, sin usar la calculadora, solo se toman dos decimales.

Tabla 3. Valores de la función seno y coseno con 2 decimales.

	0°	**15°**	**30°**	**45°**	**60°**	**75°**	**90°**
Sen(x)	0	0.26	0.5	0.71	0.87	0.97	1
Cos(x)	1	0.97	0.87	0.71	0.5	0.26	0

Fuente elaboración propia, 2025

Aproximación lineal de valores de la función seno.

Ejemplo 1. Aproximar $sen(50°)$.

Usamos:

$sen(45°) = 0.71, sen(60°) = 0.87, \quad restamos: 0.87 - 0.71 = 0.16$

$50° - 45° = 5°, \quad \frac{0.16}{5} = 0.03$

La aproximación es: $sen(50°) = 0.71 + 0.03 = 0.74$.

Valor exacto en calculadora: $sen(50°) = 0.7660$.

Ejemplo 2. Proceso inverso, aproximar $sen^{-1}(0.6)$.

El valor 0.6 lo ubicamos entre 0.5 y 0.71, por lo tanto, usamos:

$sen(30°) = 0.5, \quad sen(45°) = 0.71.$

$b - a = 0.71 - 0.5 = 0.21, \quad c - a = 0.6 - 0.5 = 0.1, \quad 45° - 30° = 15°.$

$\frac{c-a}{b-a} = \frac{0.1}{0.21} = 0.47, \quad 15° * 0.47 = 7.05°$

Nuestra aproximación es:

$sen^{-1}(0.6) = 30° + 7.05° = 37.05°$

Valor exacto en calculadora:

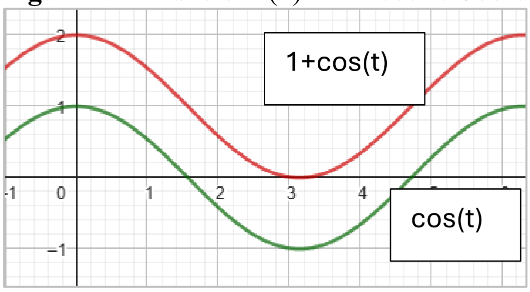
$sen^{-1}(0.6) = 36.86°$

Gráficas en coordenadas polares y en ecuaciones paramétricas.

Como segunda parte en esta publicación, estudiamos otra aplicación de los valores de la función seno y coseno, tratando de no recurrir a la calculadora. Se trata de elaboración de gráficas en coordenadas polares.

Ejemplo 3. Elaboramos la gráfica de $r = 1 + \cos\theta$. Esta es una función en coordenadas polares. (Stewart, (2022), p. 7), ver figura 4 y tabla 2.

Figura 4. La función f(x) = 1 + cos x. Coordenadas Cartesianas.



Fuente: GeoGebra.org. elaboración propia, 2025

Podemos usar valores de la tabla 4.

Tabla 4

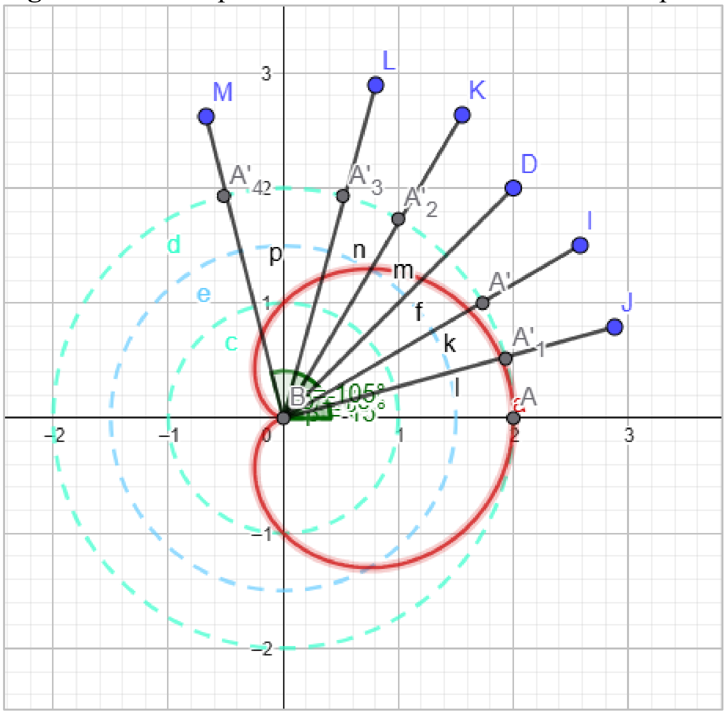
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
Cos(θ)	1	0.966	0.866	0.7	0.5	0.26	0
R=1+Cos(θ)	2	1.966	1.866	1.7	1.5	1.26	1

Fuente elaboración propia, 2025

Las líneas que salen del origen tienen ángulos 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75° y 90°. Los puntos que ahora vamos a graficar tienen coordenadas (θ, r). r es la distancia al origen. Trazamos 3 círculos, uno de radio 1, de radio 1.5 y radio 2, para que sea más fácil ubicar la distancia al origen, 2, 1.9, 1.8, 1.7, 1.5, 1.2 y 1 en distintos ángulos. Observamos que en 180°, $r = 1 + \cos\theta = 1 - 1 = 0$. Ahí termina la mitad superior de la gráfica. La gráfica de $1 + \cos\theta$ es simétrica con respecto a un eje vertical que pasa por $\theta = \pi$. Por lo tanto, la gráfica polar también debe ser simétrica en su mitad superior y mitad inferior, y con esto terminamos de graficar, ver figura 5.

(2, 0°), (1.9, 15°), (1.8, 30°), (1.7, 45°), (1.5, 60°), (1.2, 75°), (1, 90°)

Figura 5. Gráfica polar de $\mathrm{r} = 1 + \cos\theta$. Coordenadas polares.



Fuente: GeoGebra.org. elaboración propia, 2025

Ejemplo 3. Elaboramos la gráfica de $r = 2\cos(3\theta)$. Esta es una función en coordenadas polares. Introducimos el comando en GeoGebra, tal como está la función, ver tabla 5.

Tabla 4. Valores de r y θ para la función $r = 2\cos(3\theta)$.

$\boldsymbol{\theta}$	**0°**	**15°**	**30°**	**45°**	**60°**	**75°**	**90°**
3θ	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°
Cos(3θ)	1	0.7	0	–0.7	–1	–0.7	0
$r = 2\cos(3\theta)$	2	1.4	0	–1.4	–2	–1.4	0

Fuente: Elaboración propia, 2025

Para ubicar las coordenadas (–1.4, 45°) prolongamos la línea a 45° hacia el tercer cuadrante y ahí medimos la distancia 1.4, lo cual es equivalente a (1.4, 45°+180°). De manera similar se procede para (–2, 60°), que es equivalente a (2, 60°+180°).

Observamos que la gráfica y=2 cos(3x) pasa por y=0 en x=0.5, 1.58 y 2.6 radianes que equivalen a $\theta_1 = \frac{\pi/2}{3} = \frac{\pi}{6} = 30°, \theta_2 = \frac{3\pi/2}{3} = \frac{\pi}{2} = 90°, \theta_3 = \frac{2\pi+\pi/2}{3} = \frac{5\pi}{6} = 150°$.

La función alcanza sus valores máximos y mínimos, 2, –2, 2, –2: en $3\theta = 0°, 3\theta = 180°, 3\theta = 360°, 3\theta = 360° + 180° = 540°$. Es decir, en $\theta = 0°, \theta = 60°, \theta = 120°$ y $\theta = 180°$. Los cuales quedan en los extremos de los pétalos, en 0° y 180° es el punto inicial y final, coinciden. Observe la figura 6.

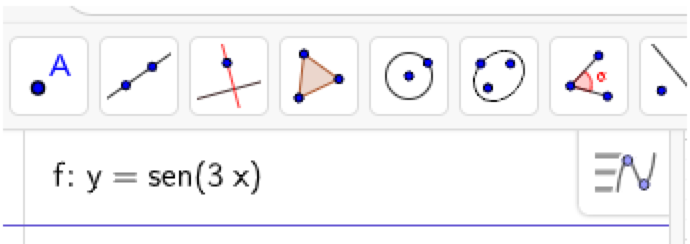
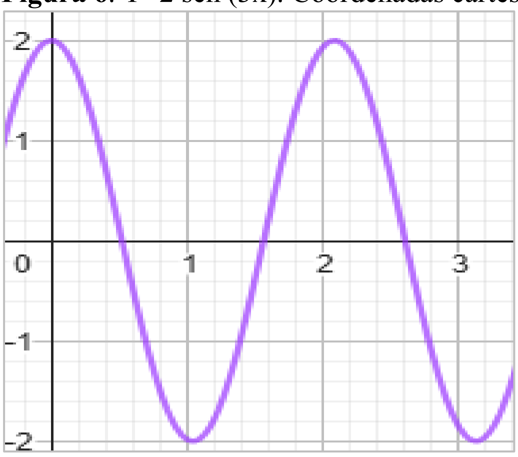
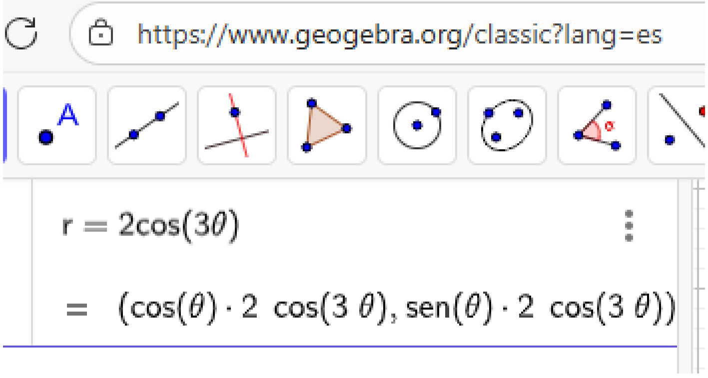


Figura 6. Y=2 sen (3x). Coordenadas cartesianas.



Fuente: GeoGebra.org. elaboración propia, 2025

Figura 7

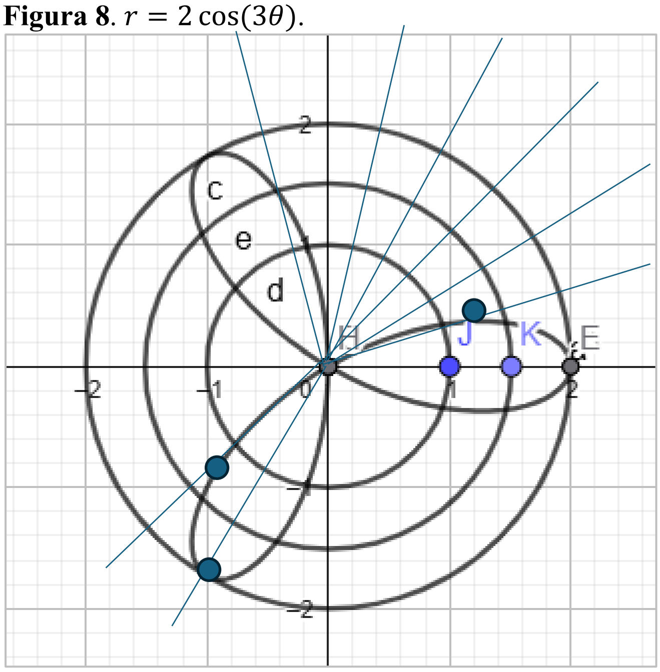


De inmediato GeoGebra muestra la gráfica. Agregamos líneas indicando ángulos, ver figura 8. Para trazar la gráfica a mano, algunos puntos fáciles de ubicar, usando la figura 6, son:

(2, 0°), (0, 30°), (–2, 60°), (0, 90°), (2, 120°), (0, 150°), (–2, 180°)

Observamos que la figura 6 es simétrica entre $\frac{\pi}{6}$ $y\,\frac{2\pi}{6}$ por lo tanto la gráfica polar es simétrica también, con lo cual queda dibujado el segundo pétalo, tercer cuadrante. La figura 6 es simétrica entre $\frac{2\pi}{6}$ $y\,\frac{3\pi}{6}$ por lo tanto la gráfica polar es simétrica también, con lo cual queda dibujado el tercer pétalo, segundo cuadrante.

Figura 8. $r = 2\cos(3\theta)$.



Fuente: GeoGebra.org. Elaboración propia, 2025

CONCLUSIONES

Se ha hecho un recorrido histórico para resaltar la importancia de la función seno y coseno en particular, y en general de las funciones trigonométricas. La lejanía en el tiempo de la utilización y necesidad de cálculos con estas funciones se ha visto a lo largo del desarrollo de las distintas civilizaciones que han hecho grandes aportes a las matemáticas.

Por otro lado, insistimos en la conveniencia de dejar a un lado la calculadora para hacer énfasis en desarrollar la capacidad de análisis y observación del estudiante, así como para mejorar sus competencias de razonamiento lógico y razonamiento aritmético. Para prescindir de la calculadora necesitamos realizar algunas aproximaciones para tener alguna idea del resultado numérico y poder revisar si nuestras operaciones están correctas. Otro recurso para explotar es la simetría de la gráfica de la función seno y coseno, la cual se traslada a las gráficas en coordenadas polares y nos permite ahorrar algunas evaluaciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Apostol, Tom. (1964). Mathematical Analysis. A Modern Approach to Advanced Calculus. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Baldor, J. A. (1983). Geometría Plana y del Espacio y Trigonometría. Ed. Publicaciones Cultural, S. A. ISBN: 968-439-214-1.

Caballero, Arquímides. Tablas trigonométricas.

Daher, Wajeeh M. (2020). Grade 10 Students' Technology-Based Exploration Processes of Narratives Associated with the Sine Function.

ERIC - EJ1272233 - Grade 10 Students' Technology-Based Exploration Processes of Narratives Associated with the Sine Function, EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 2020

Downs, Nathan; Parisi, Alfio V.; Galligan, Linda; Turner, Joanna; Amar, Abdurazaq; King, Rachel; Ultra, Filipina; Butler, Harry. (2016). Solar Radiation and the UV Index: An Application of Numerical Integration, Trigonometric Functions, Online Education and the Modelling Process.

ERIC - EJ1105161 - Solar Radiation and the UV Index: An Application of Numerical Integration, Trigonometric Functions, Online Education and the Modelling Process, International Journal of Research in Education and Science, 2016

Fonseca Zaraza, Erika. (2021). Sistematización de la Práctica Educativa "Funciones Seno y Coseno: Cambios en Amplitud y Periodo". Trabajo de Grado para Optar el Título en Maestría en Educación.

Gholami, Hosseinali. (2022). Improving the Performance of Mathematics Teachers through Preparing a Research Lesson on the Topic of Maximum and Minimum Values of a Trigonometric Function.

ERIC - EJ1350529 - Improving the Performance of Mathematics Teachers through Preparing a Research Lesson on the Topic of Maximum and Minimum Values of a Trigonometric Function, Mathematics Teaching Research Journal, 2022

Ibarra Escutia, Joel. (2013). Matemáticas 5 Ecuaciones Diferenciales. Ed. McGraw-Hill. ISBN: 978-607-15-0962-8.

Kepceoglu, Ibrahim; Yavuz, llyas. (2016). Teaching a Concept with GeoGebra: Periodicity of Trigonometric Functions.

ERIC - EJ1098194 - Teaching a Concept with GeoGebra: Periodicity of Trigonometric Functions, Educational Research and Reviews, 2016-Apr-23

Larson, Ron; Edwards, Bruce. (2023). Cálculo Diferencial. Ed. Cengage. ISBN: 978-607-570-167-7.

Larson, Ron; Edwards, Bruce. (2023). Cálculo de Varias Variables. Ed. Cengage. ISBN: 978-0-357-74913-5.

Larson, Ron; Edwards, Bruce. (2018). Matemáticas II Cálculo Integral. Ed. Cengage. ISBN: 978-607-522-015-4.

Maknun, Churun Lu'lu'il; Rosjanuardi, Rizky; Jupri, Al. (2020). Didactical Design on Drawing and Analysing Trigonometric Functions Graph through a Unit Circle Approach.

ERIC - EJ1279498 - Didactical Design on Drawing and Analysing Trigonometric Functions Graph through a Unit Circle Approach, International Electronic Journal of Mathematics Education, 2020

Maknun, Churun Lu'lu'il, Rizky Rosjanuardi2, Al Jupri. (2022). Epistemological Obstacle in Learning Trigonometry.

ERIC - EJ1350528 - Epistemological Obstacle in Learning Trigonometry, Mathematics Teaching Research Journal, 2022

Martín-Fernández, Enrique, Ruiz-Hidalgo, Juan Francisco, Rico, Luis. (2019). Meaning and Understanding of School Mathematical Concepts by Secondary Students: The Study of Sine and Cosine. https://doi.org/10.29333/ejmste/110490

Montiel Espinoza, Gisela. Directores: Cantoral Uriza, Ricardo; Castañeda Alonso, Apolo. (2005). Tesis Doctoral: Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica.

Repositorio Digital IPN: Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica

Nueva Escuela Mexicana (NEM). (s.f.). Trigonometría: Concepto, Historia y Principales Conceptos

Ordoñez, Joan Sebastián; Ferrari Escolá, Marcela. (2017). identificando el razonamiento covariacional a través del modelo de argumentación de Toulmin: el caso de la función seno.

Microsoft Word - Volumen 2-2.docx

Ortega Gallegos, Karla Adriana, Izquierdo Buenrostro, Gustavo N. (2018). Algunos Aspectos Históricos de las Funciones Seno y Coseno. portvolimp-PC5.cdr

Ponte, João Pedro. (2012). The History of the Concept of Function and Some Educational Implications. Wayback Machine

Purcell, Edwin, Varberg, Dale, Rigdon, Steven E. Cálculo. (2007). Ed. ISBN: 978-970-26-0919-3.

Stewart, James. (2022). Cálculo 2. Problemas y Soluciones. Ed. Cengage. ISBN: 978-1-305-27762-0.

Serway, Raymond A., Jewett, John W. Jr. (2008). Física para ciencias e ingeniería, volumen 1, 7ª edición. Ed. Cengage Learning. ISBN-13: 978-970-686-822-0

SEP. (2025). Ejemplos de aplicaciones de la función seno 3er año de la escuela secundaria.

Función seno I - Nueva Escuela Mexicana Digital

Spivak, Michael. (1981). Editorial Reverté, S. A. ISBN: 84-291-5141-9 (Obra). ISBN: 84-291-5139-7 (Tomo I).

Tecnológico Nacional de México (TecNM). (2016). Temario de Cálculo Vectorial. https://www.tolucatecnm.mx/downloads/programa/6/ac004-calculo-vectorial.1645164618.pdf

Weber, Keith. (2005). Students' Understanding of Trigonometric Functions.

ERIC - EJ747914 - Students' Understanding of Trigonometric Functions, Mathematics Education Research Journal, 2005

Wikipedia. (2025). Función trigonométrica - Wikipedia, la enciclopedia libre

Yao, Xiangquan; Grande, Nicholas. (2023). opportunity to learn function transformations in dynamic mathematical environment: an analysis of 347 geogebra applets.

ERIC - ED658443 - Opportunity to Learn Function Transformations in Dynamic Mathematical Environment: An Analysis of 347 GeoGebra Applets, North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2023

Zill, Dennis G., Wright, Warren S. (2011). Matemáticas 1 Cálculo Diferencial. Ed. McGraw-Hill. ISBN: 978-607-15-0534-7.