

Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, Ciudad de México, México.

ISSN 2707-2207 / ISSN 2707-2215 (en línea), septiembre-octubre 2025,
Volumen 9, Número 5.

https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v9i5

ESTRUCTURA SUBYACENTE DE UNA PRUEBA PARA LA DEMOSTRACIÓN DE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN DE MEDIA-SUPERIOR

LATENT STRUCTURE OF A TEST DESIGNED TO ASSESS THE
DEMONSTRATION OF TRIGONOMETRIC IDENTITIES AMONG
HIGH SCHOOL STUDENTS

Mariana Isabel Varela Guerrero

Facultad de Matemáticas. Universidad Autónoma de Guerrero

Marilú Valle Torres

Facultad de Matemáticas. Universidad Autónoma de Guerrero

Ramón Reyes Carreto

Facultad de Matemáticas. Universidad Autónoma de Guerrero

Agustín Santiago Moreno

Facultad de Matemáticas. Universidad Autónoma de Guerrero

DOI: https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v9i5.20327

Estructura subyacente de una prueba para la demostración de identidades trigonométricas en estudiantes de educación de media-superior

Mariana Isabel Varela Guerrero¹

marianaivarelag@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-8234-0062>

Facultad de Matemáticas. Universidad
Autónoma de Guerrero
México

Marilú Valle Torres

mariluvallet@gmail.com

<https://orcid.org/0009-0006-8650-7962>

Facultad de Matemáticas. Universidad
Autónoma de Guerrero
México

Ramón Reyes Carreto

rcarreto@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0003-4120-5718>

Facultad de Matemáticas. Universidad
Autónoma de Guerrero
México

Agustín Santiago Moreno

asantiago@uagro.mx

<https://orcid.org/0000-0002-2901-7856>

Facultad de Matemáticas. Universidad
Autónoma de Guerrero
México

RESUMEN

Este estudio tiene por objetivo identificar los factores que subyacen en una prueba de demostración de identidades trigonométricas, la relación entre ellos y su comportamiento con la calificación de la prueba en estudiantes de educación media superior. La prueba se aplicó a una muestra no probabilística de 80 estudiantes de una institución educativa pública en la ciudad de Barranquilla, Colombia. Entre los resultados destaca que subyacen dos estructuras, una de dos factores y otra de tres factores; la primera alude a los factores de Lenguaje Algebraico y Procedimiento Algebraico; en la segunda se identifican los factores: Deducción de identidades trigonométricas utilizando la secante y tangente (DST), Verificación de identidades recíprocas del seno y coseno (VRSC) y Verificación de identidades con el seno y coseno (VSC). Se concluye que el modelo de tres factores es mejor, debido a sus resultados de índices de bondad de ajuste. Existe una asociación positiva y significativa entre los tres factores y la calificación de la prueba, siendo DST el de mayor importancia. Además, existen efectos directos del factor VSC con los factores DST y VRSC. Estas conclusiones son coherentes, puesto que VSC facilita la aplicación de DST y VRSC en el desarrollo de la prueba.

Palabras clave: trigonometría; educación media superior; análisis factorial confirmatorio; modelos de ecuaciones estructurales

¹ Autor principal

Correspondencia: marianaivarelag@gmail.com

Latent structure of a test designed to assess the Demonstration of Trigonometric Identities among high school students

ABSTRACT

The objective of this study is to identify the factors underlying a trigonometric identities demonstration test, the relationship between them and their behavior with the test scores in high school students. The test was applied to a non-probabilistic sample of 80 students from a public educational institution in Barranquilla, Colombia. Among the results, it stands out that there are two underlying structures, one with two factors and the other with three factors; the first one refers to the factors of Algebraic Language and Algebraic Procedure; the second one identifies the factors: Deduction of trigonometric identities using the secant and tangent (DST), Verification of reciprocal of sine and cosine (VRSC) and Verification of identities with sine and cosine (VSC). It is concluded that the three-factor model is better, due to the results of goodness-of-fit-indices. There is a positive and significant association between the three factors and test scores, with DST being the most important. In addition, there are direct effects of the VSC factor on DST and VRSC factors. These conclusions are consistent, since VSC facilitates the application of DST and VRSC in the development of the test.

Keywords: *Trigonometry; High school; factor analysis confirmatory; structural equations models*

Artículo recibido 09 agosto 2025

Aceptado para publicación: 13 septiembre 2025



INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la trigonometría en el ámbito de la educación media superior, generalmente se ha limitado al abordaje de conceptos y/o definiciones, sin visualizar la conexión que tiene con diferentes áreas de la matemática, como la aritmética, álgebra y geometría; además de que se ha centrado más en el aprendizaje memorístico. Bajo este enfoque el estudiante no cuenta con una enseñanza para el razonamiento, mucho menos para comprender la incidencia social (Andrade, Alcívar, Palma y Ampuero, 2020).

Uno de los temas importantes de la trigonometría en la educación media superior, es la enseñanza de las identidades trigonométricas. Estas identidades contienen funciones trigonométricas, definidas como igualdades cuya demostración requiere una manipulación algebraica (Liu, Li, Liu, Li y Li, 2022). Se destacan dos aspectos, desde el aspecto procedimental, las operaciones entre números reales, operaciones algebraicas como la factorización (Vasquez Romero, 2016); para el aspecto demostrativo se requiere el pensamiento lógico, que permite el desarrollo secuencial y sistemático propio de la demostración (Feria Torres, 2019).

Las identidades trigonométricas son útiles desde el ámbito educativo y social. Desde el primero, facilita al estudiante comprender temas más complejos, como límites, derivadas e integrales trigonométricas, que a su vez son utilizadas en la resolución de problemas en distintas áreas como estadística, física, economía, entre otros (Herrera Mayorga, 2019). En el aspecto social, permiten el desarrollo de habilidades como la argumentación y el razonamiento en diferentes situaciones y/o problemas (Feria Torres, 2019).

En la literatura, los trabajos relacionados con el proceso de aprendizaje de las identidades trigonométricas se han abordado principalmente desde el aspecto didáctico, realizando actividades por medio del software GeoGebra, en donde a través de una secuencia o estrategia didáctica, promueven un aprendizaje significativo en los estudiantes (Sánchez Tiol, 2015, Feria Torres, 2019, García Ramos y Posada Ruiz, 2022). También se han utilizado otros métodos, como el método analítico o razonado, caracterizado por el desglose detallado de los pasos de los temas previos necesarios para su demostración con el fin de mejorar el aprendizaje de este (Claudio Aquino, Martín Cespedes y Santiago Dionicio, 2023). Finalmente se ha utilizado las identidades trigonométricas,



como vía de comprensión de conjuntos de números, en particular los complejos, permitiendo que el proceso demostrativo sea más directo debido a que las manipulaciones algebraicas son más sencillas (Vasquez Romero, 2016).

La búsqueda y determinación de estructuras o constructos que subyacen en un fenómeno educativo con un abordaje limitado permite la explicación de su fundamentación teórica (Rodríguez León, Cruz, Berra Barona y Ramírez, 2023). Bajo tal contexto, el objetivo de este estudio consiste en identificar factores que subyacen en una prueba de demostración de identidades trigonométricas, la relación entre ellos y su comportamiento con la calificación de la prueba en estudiantes de educación media superior.

METODOLOGÍA

Participantes

La muestra fue no probabilística, estuvo conformada por 80 estudiantes (39 hombres y 41 mujeres) con edades entre 15 y 17 años, pertenecientes a una institución educativa pública de la ciudad de Barranquilla, Atlántico, Colombia, y que cursaban la educación media superior.

Instrumento

Prueba para demostración de identidad trigonométrica

La prueba constó de dos problemas. El primero conformado por 7 ítems que corresponden a los pasos para la demostración de una identidad, donde el estudiante debe enunciar la operación algebraica o trigonométrica, tomando en cuenta el desarrollo algebraico. El segundo constó de 5 ítems, los cuales también son pasos para la demostración de una identidad, pero en este caso, los estudiantes deben aplicar las operaciones algebraicas y/o trigonométricas considerando las indicaciones dadas por escrito. La calificación para cada ítem fue de forma binaria, es decir, 0 corresponde a incorrecto y 1 corresponde a correcto. La descripción de cada ítem de la prueba se muestra en la Tabla 1.



Tabla 1. Descripción de los ítems de la prueba para la demostración de identidades trigonométricas

Problema	Evaluación	No.	Ítem (Justificación)
1. Dada la siguiente identidad $\frac{\csc \theta}{\cot \theta + \tan \theta} = \cos \theta$	Enunciar el procedimiento algebraico realizado en cada paso de la demostración de una identidad trigonométrica	1	<i>Identidad cociente</i>
¿Qué operación se realizó en cada paso?		2	<i>Suma de fracciones</i>
		3	<i>Multiplicación de términos semejantes</i>
		4	<i>Identidad pitagórica</i>
		5	<i>Identidad recíproca</i>
		6	<i>Ley de extremos y medios</i>
		7	<i>Simplificación</i>
2. Dada la siguiente identidad $\cos \theta + \tan \theta \sin \theta - \sec \theta + \tan \theta = \tan \theta$	Desarrollar los procesos algebraicos realizados en cada paso de la demostración de una identidad trigonométrica	8	<i>Identidad tangente</i>
Teniendo en cuenta la operación indicada realiza los pasos		9	<i>Suma de fracciones heterogéneas</i>
		10	<i>Identidad pitagórica</i>
		11	<i>Identidad recíproca</i>
		12	<i>Resta de fracciones heterogéneas</i>

Fuente. Tomada en Arrieta y Varela (2020)

La construcción de la prueba fue bajo la supervisión de un experto en la materia, quien aportó su conocimiento en la formulación de las preguntas y definir las actividades a realizar. Posteriormente, un segundo experto en la materia revisó los aspectos semánticos, asegurando la validez tanto en apariencia como en contenido (Arrieta y Varela, 2020). La validez interna de esta prueba se realizó mediante el alfa de Cronbach cuyo valor fue de 0.878 (Arrieta y Varela, 2020).

Análisis de datos

El análisis de datos constó de tres etapas. La primera utilizó el Análisis Factorial Exploratorio (AFE) para identificar los factores que subyacen de la prueba. Para ello, se utilizó el software computacional



R versión 4.2.3 (R Core Team, 2023), la paquetería de *Psych* desarrollada por Revelle (2024), y las funciones *fa()* y *fa.diagram()*. La utilización del AFE radica en que permite identificar la estructura que subyace en el conjunto de ítems, y las asociaciones entre ítems de la prueba, en busca de reducir la dimensión de los datos (Romero y Mora, 2020).

Para la idoneidad de los datos, se contemplaron los valores de los supuestos de Kaiser-Meyer-Olkin (KMO) y la Prueba de esfericidad de Bartlett (Williams, Onsman y Brown, 2010). El índice de bondad de ajuste para el AFE tuvo en cuenta que la muestra fue menor a 100, por tanto, se analizó el Residuo Cuadrático Medio Estandarizado (conocido por sus siglas en inglés como RMSR) y el Índice de ajuste de Tucker-Lewis (conocido por sus siglas en inglés como TLI) (Velásquez Cabrejos, 2020).

Para la segunda etapa se utilizó el Análisis Factorial Confirmatorio (AFC), el mismo software computacional R y la paquetería *lavaan* desarrollado por Lishinski (2024) con la función de *cfa()*; y la paquetería *semPlot* desarrollado por Epskamp (2022) con la función de *semPaths()*. El AFC es una técnica estadística que actualmente está teniendo una gran aportación en estudios relacionados a los aspectos psicométricos de instrumentos, útil para validar estructuras y constructos de un tema y estimar la causalidad y efectos entre factores; asimismo, valida el modelo resultante de un AFE dándole mayor confiabilidad a los resultados obtenidos (Hernández-Suarez, Fernández-Cézar y Ramírez-Leal, 2024).

Como tercera y última etapa se consideró el Modelo de Ecuaciones Estructurales (MEE), para el análisis de datos se utilizó la paquetería *lavaan* desarrollado por Lishinski (2024) con la función de *sem()*; y la paquetería *semPlot* desarrollado por Epskamp (2022) usando la función de *semPaths()*. La aplicación del MEE en el aspecto educativo proporciona una formalización explícita del comportamiento de las variables y/o constructos que están incluidas en teorías más complejas; además, puede corroborar relaciones hipotéticas (Jirón y Riobóo, 2022).

Considerando que la muestra fue menor a 100 estudiantes, para el análisis de índices de bondad de ajuste en el AFC y MEE se utilizaron los criterios de la Raíz del Residuo Estandarizado Medio (conocido con sus siglas en inglés como (SRMR) y el Índice de ajuste Comparativo (CFI) (Jordan Muiños, 2021).



RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Análisis Factorial Exploratorio (AFE)

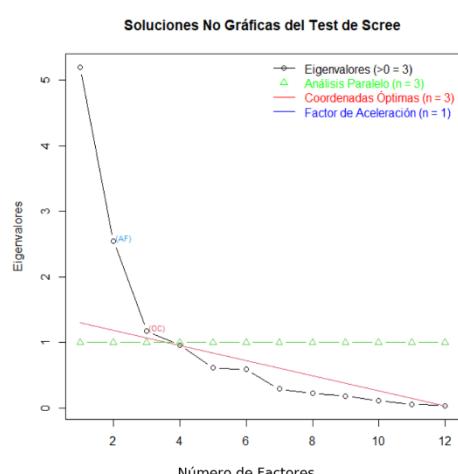
Para identificar la estructura de relación que subyace entre los 12 ítems, se procedió a realizar el Análisis Factorial Exploratorio (AFE); sin embargo, de manera previa, para saber si las variables observadas estaban realmente correlacionadas y con ello conocer si tiene sentido aplicar AFE para extraer los factores, se aplicó la prueba de esfericidad de Bartlett.

El valor de la prueba de esfericidad de Bartlett fue Chi cuadrada 7,431.61 con su p-valor 0.00, contra la de referencia que resulte significativa ($p < 0.05$) por lo que el AFE es adecuado (Williams, Onsman y Brown, 2010).

Asimismo, para conocer si el tamaño de muestra es adecuado al aplicar AFE, se calculó el índice KMO el cual varía de 0 a 1, el resultado fue 0.64. con el valor de referencia (≥ 0.50) (Williams, Onsman y Brown, 2010), se concluye que los datos de la prueba son adecuados para aplicar el AFE. En la Figura 1 se muestra diferentes criterios que tienen el AFE para determinar el número de factores, dichos criterios son valores propios o eigenvalores, el análisis paralelo (AP), coordenadas óptimas y el factor de aceleración. En ella se puede observar que los tres primeros criterios coinciden en determinar tres factores, mientras que el último criterio indica que en la prueba subyacen solo dos factores.

Figura 1.

Análisis de factores teniendo en cuenta los eigenvalores



Tomando en cuenta los anteriores resultados se puede considerar dos modelos subyacentes en la prueba: uno de dos factores (\mathcal{M}_1), y otro de tres factores (\mathcal{M}_2). En la Tabla 2, se pueden observar los valores de las cargas factoriales para cada ítem y factor de ambos modelos. Para asignar los ítems a cada factor se consideraron cargas factoriales con valor absoluto a 0.40 (Mavrou, 2015).

Se puede observar que en el modelo \mathcal{M}_1 los dos factores identificados están relacionados con los dos problemas planteados originalmente en la prueba. Por consiguiente, al primer factor resulta razonable identificarlo como “Procedimiento algebraico” (PA) y al segundo como “Lenguaje algebraico” (LA). Dicho modelo está relacionado con los hallazgos de Claudio Aquino, et. al (2023), puesto que el procedimiento implementado para la demostración requiere la apropiación de conceptos a nivel algebraico (PA) y verbal (LA), los cuales permiten que el estudiante tenga un buen aprendizaje.

En el modelo \mathcal{M}_2 se identifican 3 factores; que, de acuerdo con los ítems asignados para cada factor, resulta coherente identificar a cada factor con los siguientes nombres: el primero: “Deducción de identidades trigonométricas utilizando la secante y tangente” (DST), segundo: “Verificación de identidades recíprocas del seno y coseno” (VRSC) y el tercero: “Verificación de identidades con el seno y coseno” (VSC).

El anterior resultado está relacionado con los trabajos de Sánchez Tiol (2015), Feria Torres (2019) y Osada y Supatmono (2024) en el sentido que no solo inciden el lenguaje y procedimiento algebraico, sino también los conceptos trigonométricos básicos, tales como las funciones trigonométricas, razones trigonométricas y las identidades trigonométricas fundamentales (VSC), puesto que a lo largo de la demostración se utilizan simultáneamente conceptos algebraicos y trigonométricos (VRSC), por tanto, los factores están relacionados primordialmente con conceptos trigonométricos, y el álgebra se convierte en un camino para facilitar los cálculos (DST).



Tabla 2. Cargas factoriales de los ítems para los modelos \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2

Ítem	Cargas factoriales				
	\mathcal{M}_1	PA	LA	DST	\mathcal{M}_2
1			0.364		0.610
2			0.470		0.917
3			0.619		0.674
4			0.645		0.454
5			0.691		0.405
6			0.840		1.080
7			0.564		0.692
8	0.841			0.823	
9	0.960			0.948	
10	0.985			0.977	
11	1.000			0.994	
12	0.898			0.909	

Finalmente, para comparar los índices de ajuste entre los dos modelos identificados por el AFE, en la Tabla 3 se presentan los resultados de índices de ajuste, el Residuo cuadrático medio estandarizado (RMSR) y el Índice de ajuste de Tucker-Lewis (TLI). Donde los valores del índice RMSR son menores o iguales 0.05 indican que ambos modelos están bien ajustados (Romero y Mora, 2020), y por tanto son aceptables. Por otra parte, los valores del índice TLI indican que ambos modelos presentan un ajuste moderado (Velásquez Cabrejos, 2020). Bajo este contexto, se puede deducir que ambos modelos son aceptables, pero el modelo \mathcal{M}_2 , que contiene 3 factores, es mejor modelo en comparación con el modelo \mathcal{M}_1 .



Tabla 3. Índices de ajustes para los modelos \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2

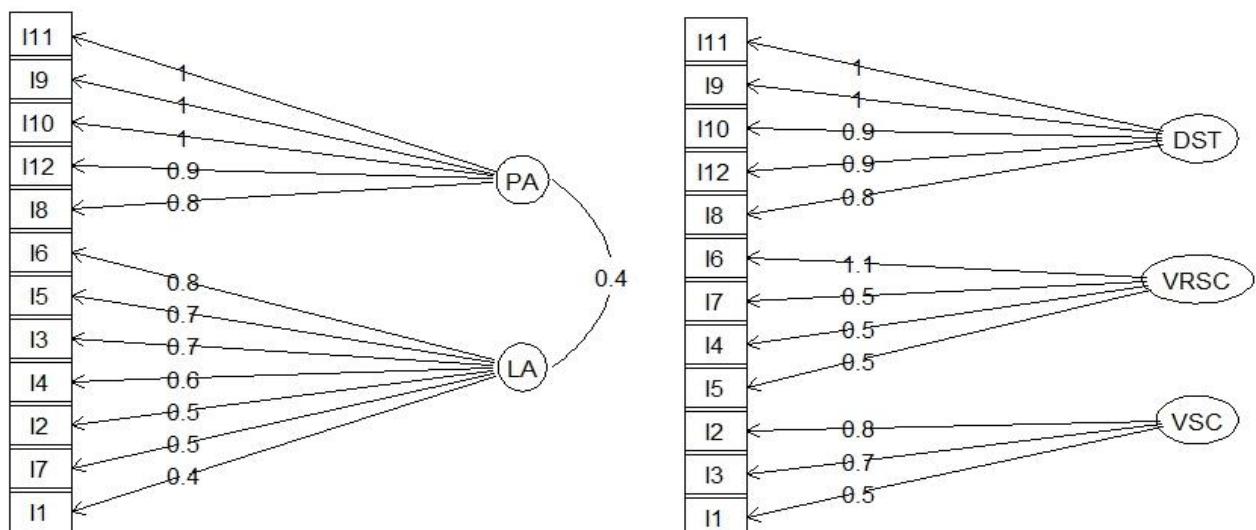
Índices de Ajuste	Modelos		Valores de referencia	Interpretación
	\mathcal{M}_1	\mathcal{M}_2		
RMSR	0.07	0.05	≤ 0.05	Aceptable*
TLI	0.805	0.837	≥ 0.80	Moderado**

* (Romero y Mora, 2020), ** (Velásquez Cabrejos, 2020)

En la Figura 2 se muestran los diagramas para cada estructura subyacente en la prueba. Para la primera estructura, a la izquierda, se observa una asociación entre los dos factores, además que tiene altos valores los ítems del primer factor (PA); en la segunda estructura, a la derecha, de tres factores, se evidencia que los factores no están relacionados y a su vez que los ítems del primer y tercer factor (DST y VSC) son los que tienen mayores cargas factoriales.

Figura 2

Diagrama de dos y tres factores de la resolución de identidades trigonométricas



Análisis Factorial Confirmatorio (AFC)

Para comprobar las hipótesis del número de factores y sus relaciones, en este apartado se aplicó el AFC a los modelos \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 teniendo en cuenta los resultados del AFE, expuestos en la sección anterior. Para comparar la bondad de ajuste de los modelos, se obtuvieron los principales índices de bondad de ajuste de ambos modelos, mostrados en la Tabla 4. Los valores de SRMR menores o iguales 0.09 indican que ambos modelos son aceptables de manera global; sin embargo, el valor del índice CFI mayor o igual a 0.90 indica que \mathcal{M}_2 es un modelo adecuado (Jordan Muiños, 2021) en comparación con el modelo \mathcal{M}_1 .

Tabla 4. Índices de ajustes del AFC de los modelos \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2

Índices de Ajuste	Modelos	Valores de referencia	Interpretación
	\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2		
SRMR	0.08 0.081	≤ 0.09	Aceptable*
CFI	0.877 0.914	≥ 0.90	Adecuado*

*(Jordan Muiños, 2021)

Aplicando el AFC al modelo \mathcal{M}_2 , se obtuvieron los resultados de las estimaciones de los parámetros que se presentan en la Tabla 5. De dicha tabla se puede interpretar que los ítems 5 y 6 tienen los mayores valores en el factor VRSC; por otra parte, en el factor de DST se destaca que todos sus ítems tienen altos valores. Además, de acuerdo con los p valores tan pequeños, se destaca que todos los ítems son importantes (significativos) para su respectivo factor.

Tabla 5. Estimaciones para los ítems que conforman las variables latentes del modelo \mathcal{M}_2

Variable	Ítems	Estimación	Error	z-valor	P(> z)
latente					estándar
	1	1.000			
VSC	2	2.061	0.530	3.885	0.000
	3	2.430	0.625	3.886	0.000
	4	1.000			
VRSC					



	5	1.178	0.272	4.327	0.002
	6	1.722	0.333	5.165	0.000
	7	1.003	0.215	4.667	0.000
DST	8	1.000			
	9	1.128	0.088	12.825	0.000
	10	1.153	0.087	13.309	0.000
	11	1.169	0.085	13.735	0.000
	12	1.090	0.096	11.297	0.000

En la Tabla 6 se presentan los resultados de las covarianzas entre los 3 factores. En ella se puede observar que existe una asociación significativa (*p*-valor menor que 0.05) entre el factor VSC y VRSC; también se presenta una asociación significativa entre los factores VSC y DST. Por otro lado, se destaca que no existe una asociación entre los factores VRSC y DST. De estos resultados se puede deducir que el factor VSC es un factor mediador entre los factores VRSC y DST. Tal hipótesis se probará en párrafos posteriores.

Tabla 6. Análisis de covarianza entre los factores de \mathcal{M}_2

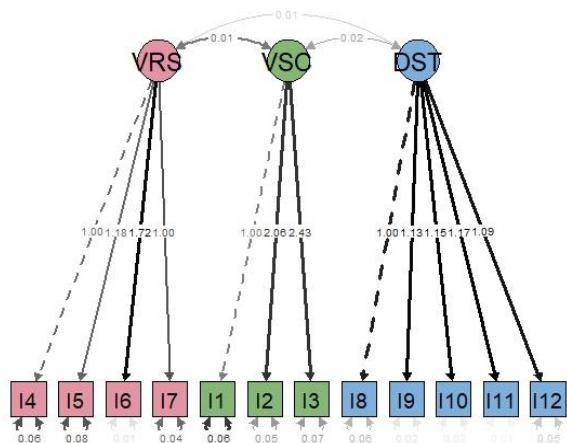
Variable latente		Estimación	Error	z-valor	<i>P</i>(> <i>z</i>)
estándar					
VSC	VRSC	0.012	0.005	2.496	0.013
	DST	0.020	0.009	2.246	0.025
VRSC	DST	0.012	0.009	1.403	0.161

La Figura 3 muestra el diagrama del modelo de 3 factores. En dicha figura se evidencia que para el factor VSC los ítems 2 (suma de fracciones) y 3 (multiplicación de términos semejantes) tienen las mayores cargas factoriales; para el factor VRSC el ítem 6 (ley de extremos y medios) es el que destaca; y para el factor DST destacan los ítems del 9 al 12. Asimismo, se resalta la asociación significativa entre el factor VSC con los otros dos factores.



Figura 3

Diagrama del modelo \mathcal{M}_2 de la resolución de identidades trigonométricas



Modelo de Ecuaciones Estructurales (MEE)

Con base a los resultados obtenidos en el AFC, se estudió el modelo \mathcal{M}_2 , a través del Modelo Ecuaciones Estructurales (MEE) para probar la hipótesis de que existen efectos del factor VSC hacia los factores VRSC y DST, bajo el supuesto de que el factor VSC representa la fase inicial en el proceso de demostración de una identidad trigonométrica y que luego se desencadena a la utilización de los dos factores restantes.

Los resultados de los índices de bondad de ajuste arrojaron un valor de 0.081 para el SRMR y 0.914 para el CFI. El resultado de SRMR indica que el modelo es aceptable; mientras que el resultado de CFI, indica que el modelo es adecuado (Jordan Muiños, 2021).

En la Tabla 7 se presentan los efectos directos del factor VSC con los factores VRSC y DST, los errores estándares, el valor Z de la prueba y el p valor. En dicha tabla se puede observar que, el factor VSC tiene un efecto directo y significativo hacia ambos factores, siendo el efecto mayor hacia el factor DST. Además, los resultados de los p valores para ambos efectos indican que dichos efectos son significativos. Lo anterior en términos de la prueba resulta congruente y está explicado puesto que el proceso de demostrar la identidad trigonométrica requiere conocer las identidades cociente, las cuales son relaciones de las razones trigonométricas en términos de seno y coseno (VSC),

permitiendo la deducción de las identidades recíprocas (VRSC) y de la secante y tangente (DST) facilitando con ello la demostración.

Tabla 7. Análisis de efectos directos de los factores de \mathcal{M}_2

Variable latente	Estimación	Error	z-valor	$P(> z)$
		estándar		
	0.626	0.231	3.093	0.007
VRSC				
VSC				
DST	1.019	0.245	2.396	0.01

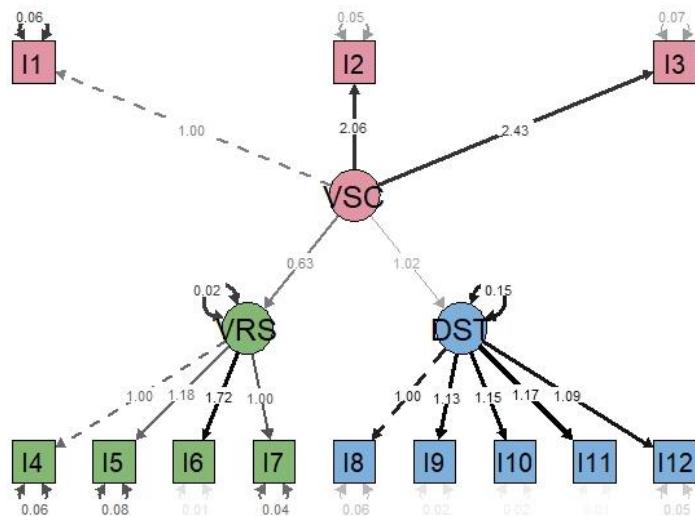
La Figura 4 muestra el diagrama del MEE. El resultado del diagrama coincide con los resultados expuestos en la Tabla 7. Se puede apreciar que existe un mayor efecto de la VSC hacia el factor DST, pero también existe un importante efecto directo del factor VSC hacia el factor VRSC. Asimismo, las cargas factoriales de los ítems para el caso de los factores de VRSC Y DST aumentan a diferencia del modelo expresado en el diagrama anterior (Véase la Figura 4).

Lo anterior está relacionado con los resultados de García Ramos y Posada Ruiz (2022), los cuales afirman que el éxito para el aprendizaje de la demostración de identidades trigonométricas consiste en que el estudiante primero requiere reconocer la utilidad de las funciones seno y coseno, donde el estudiante logra la comprensión y aplicación de las relaciones trigonométricas fundamentales en la resolución.



Figura 4

Diagrama de los efectos directos entre los constructos del \mathcal{M}_2



Para probar la hipótesis de dependencia de los factores VSC, VRSC y DST con la resolución de la demostración de identidad trigonométrica (IT), ésta última considerada como la calificación global de los estudiantes de la prueba, la cual se midió en un intervalo de 0 a 10, se utilizó el MEE.

Los resultados de los índices de bondad de ajuste arrojaron un valor de 0.066 para el SRMR y 0.916 para el CFI, teniendo presente que la muestra es menor a 100. Dichos valores indican que el modelo es adecuado (Jordan Muiños, 2021) y se confirma que el modelo identificado de 3 factores es aceptable.

Para estudiar las posibles relaciones entre los 3 factores y la calificación de la prueba (IT), se realizó el análisis de covarianzas. Los resultados encontrados se muestran en la Tabla 8. Entre los resultados destaca que existe una asociación entre el factor VSC con los factores VRSC y DST; en contraposición, estos dos últimos factores no tienen una asociación significativa.

Por otra parte, también destaca que la calificación de la prueba representada por IT está asociada significativamente con los tres factores. Además, que IT está altamente asociado particularmente con el factor DST, lo anterior este resultado discrepa del trabajo de Hincapié Montes e Hincapié Montes (2019), quienes exponen que, en una correcta demostración, por lo general se debe empezar por términos de seno y coseno, dejando de lado otras razones trigonométricas que puedan facilitar la demostración. En

en este caso particular, se necesita deducir las identidades que subyacen en la tangente y secante. Por lo anterior, para demostrar correctamente identidades trigonométricas, además de seguir una secuencia, es necesario interpretar la identidad.

Tabla 8. Análisis de covarianza entre los factores de \mathcal{M}_2 e IT en el modelo MEE

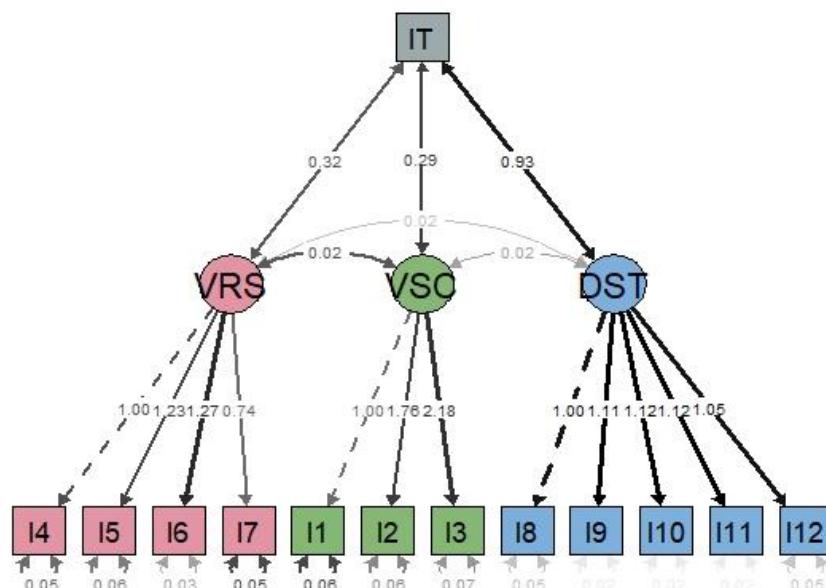
Variable latente		Estimación	Error	z-valor	$P(> z)$
estándar					
VSC	VRSC	0.020	0.006	3.093	0.002
	DST	0.023	0.010	2.382	0.017
VRSC	DST	0.020	0.011	1.807	0.071
VSC	IT	0.286	0.076	3.777	0.000
VRSC	IT	0.324	0.082	3.950	0.000
DST	IT	0.932	0.168	5.544	0.000

La Figura 5 muestra el diagrama del MEE que expresa las relaciones entre los 3 factores y la calificación de la prueba IT. En dicha figura también resalta que hay una dependencia de la calificación de la prueba mayormente con el factor DST y moderadamente para los otros dos factores.



Figura 5

Diagrama de la dependencia de los factores del \mathcal{M}_2 con la puntuación total de la prueba IT de resolución de identidades trigonométricos



CONCLUSIONES

El objetivo de este estudio consistió en identificar factores que subyacen en una prueba de demostración de identidades trigonométricas, la relación entre ellos y su comportamiento con la calificación de la prueba en estudiantes de educación media superior. En los resultados se encontraron dos modelos subyacentes, uno de dos factores y otro de tres factores, ambos casos mostraron ser modelos aceptables, además los dos presentaron asociaciones entre los factores utilizando el análisis factorial exploratorio y confirmatorio, respectivamente.

El modelo de dos factores obtenido es coherente con el procedimiento de demostración de identidades trigonométricas, puesto que es necesario tanto el lenguaje (LA) como del procedimiento algebraico (PA), para llevar a cabo una demostración correctamente (Arrieta y Varela, 2020). Por otra parte, el modelo de tres factores se encuentra estrechamente ligado con el paso a paso expuesto por Osada y Supatmono (2024), debido a que el primer paso consiste en llevar todas las identidades a términos de seno y coseno (VSC) y este desencadena en los otros dos factores VRSC y DST.

Se confirmó que el factor VSC está asociado significativamente a los factores VRSC y DST. Esto en el contexto educativo tiene una interpretación consistente, puesto que los tres factores tienen en

común las funciones seno y coseno, que son las bases de las funciones y razones trigonométricas, es necesario conocer como la función tangente, cotangente, secante y cosecante se transforman en dichas funciones básicas (Claudio Aquino, et al., 2023).

Para la búsqueda de efectos directos y asociaciones entre los factores identificados, y su relación con la calificación de la prueba, se utilizó el modelo de ecuaciones estructurales. Entre las conclusiones destacan tres: La primera, el factor VCS tiene efectos directos en los factores DST y VSRC, este resultado es congruente con las identidades trigonométricas puesto que para una adecuada demostración de identidad trigonométrica, resulta importante primero convertir las identidades a término de seno y coseno, lo cual a su vez simplifica las operaciones algebraicas y permite llegar a una identidad fundamental facilitando la conclusión deseada, es decir, se enlazan con los otros dos factores del modelo (Rathour, Obradovic, Tiwari, Mishra y Mishra, 2023).

La segunda, la calificación total de la prueba (IT) tiene asociación con los tres factores VSC, VSRC y DST. Esto significa que los tres factores están asociados y son necesarios para que haya mejor rendimiento académico en la prueba de demostración de identidades trigonométricas (Feria Torres, 2019). La última, la dependencia de IT con el factor DST fue la más importante y significativa, puesto que en este último factor los estudiantes se encargan de realizar los procedimientos algebraicos, debido a que en los ítems del DST influyen tanto en los conocimientos de operaciones algebraicas como en las identidades trigonométricas fundamentales, ambos aspectos esenciales para llevar a cabo una correcta demostración (Vázquez-Bautista, 2020).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Andrade, C. A., Alcívar, Y. G., Palma, L. M., & Ampuero, S. N. (2020). La superficialidad en la enseñanza de la trigonometría en el bachillerato y su incidencia en el aprendizaje del cálculo en el nivel universitario. *Revista de Ciencias Humanísticas y Sociales (ReHuSo)*, 5(2), 62-69.
- Recuperado de: <https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Rehuso/article/view/1684>
- Arrieta, A. & Varela, M. (2020). *Memoria de trabajo y desempeño en demostración de identidades trigonométricas en estudiantes de décimo grado* [Tesis de Pregrado, Universidad del Atlántico]. Repositorio institucional.



Claudio Aquino, R., Martin Cespedes, R. D., & Santiago Dionicio, A. N. (2023). Método razonado y resolución de identidades trigonométricas en estudiantes de la Institución Educativa 0431 de Nuevo Progreso, Tocache [Tesis de Pregrado, Universidad Nacional Hermilio Valdizán]. Repositorio institucional

Epskamp S (2022). *semPlot: Path Diagrams and Visual Analysis of Various SEM Packages' Output* (version 1.1.6) [Paquete R]. <https://CRAN.R-project.org/package=semPlot>

Feria Torres, E. (2019). *Diseño de una estrategia didáctica en contribución al aprendizaje de las identidades trigonométricas mediado por la tecnología para favorecer su aprendizaje significativo critico* [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio institucional

García Ramos, E. D. J., & Posada Ruíz, M. D. (2022). *Mediación complementaria de Geogebra y material concreto en los procesos de aprendizaje de las identidades trigonométricas pitagóricas fundamentales en estudiantes de décimo grado de la IE Juan Pablo II* [Tesis de Maestría, Universidad Pontificia Bolivariana]. Repositorio institucional.

Hernández-Suarez, C. A., Fernández-Cézar, R., & Ramírez-Leal, P. (2024). Exploración de creencias sobre el aprendizaje de las matemáticas: un estudio de fiabilidad y análisis factorial con estudiantes de educación básica y media. *Saber, Ciencia y Libertad*, 19(1), 391-418. <https://doi.org/10.18041/2382-3240/saber.2024v19n1.11413>

Herrera Mayorga, J. A. (2019). Creación de un MOOC, como estrategia didáctica para la enseñanza en las identidades trigonométricas pitagóricas, con estudiantes del grado décimo, en la institución educativa Liceo Quindío de Salento. [Tesis de Maestría, Universidad Tecnológica de Pereira]. Repositorio institucional.

Hincapié Montes, Y., & Hincapié Montes, J. (2019). *Actividad matemática de estudiantes de décimo grupo: funciones trigonométricas y Geogebra* [Tesis de Maestría, Universidad de Antioquia]. Repositorio institucional.

Jirón, D. M. A., & Riobóo, L. M. D. (2022). Modelos de ecuaciones estructurales (SEM) y su aplicación en la educación. *Revista Ciencia y Tecnología El Higo*, 12(1), 28-41. <https://doi.org/10.5377/elhigo.v12i1.14524>



Jordan Muiños, F. M. (2021). Valor de corte de los índices de ajuste en el análisis factorial confirmatorio. *Psocial*, 7(1), 66-71. Recuperado de:

https://www.scielo.org.ar/scielo.php?pid=S2422-619X2021000100066&script=sci_arttext

Liu, Z., Li, Y., Liu, Z., Li, L., & Li, Z. (2022). Learning to Prove Trigonometric Identities. *arXiv preprint arXiv:2207.06679*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2207.06679>

Lishinski A (2024). *lavaanPlot: Path Diagrams for 'Lavaan' Models via 'DiagrammeR'*. (version 0.8.1) [Paquete R]. <https://CRAN.R-project.org/package=lavaanPlot>

Mavrou, I. (2015). Análisis factorial exploratorio: cuestiones conceptuales y metodológicas. *Revista Nebrija de Lingüística Aplicada a la Enseñanza de Lenguas*, (19), 71-80. <https://doi.org/10.26378/rnlael019283>

Osada, S. S., & Supatmono, F. C. (2024). Analysis of Student Learning Outcomes in Proving Trigonometric Identities from Problem Based Learning Class. In *Companion Proceedings of 7th South Asia Design Research International Conference 2019 "Improving Professionalism and Reflective Thinking through Design Research"* (p. 44). Sanata Dharma University Press.

R Core Team (2023). *R: A language and environment for statistical computing* [Software]. R Foundation for Statistical Computing. <https://www.R-project.org/>.

Revelle, W (2024). *psych: Procedures for Psychological, Psychometric, and Personality Research*. Northwestern University, Evanston, Illinois (Version 2.4.3) [Paquete R]. <https://CRAN.R-project.org/package=psych>

Rodríguez León, Y. J., Cruz, I. J., Berra Barona, C., & Ramírez, M. (2023). Influencia de entornos virtuales de aprendizaje en el desarrollo de habilidades cognitivas: un modelo de ecuaciones estructurales. *RIDE. Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, 13(26). <https://doi.org/10.23913/ride.v13i26.1381>

Romero, K. P., & Mora, E. O. M. (2020). Análisis factorial exploratorio mediante el uso de las medidas de adecuación muestral kmo y esfericidad de bartlett para determinar factores principales. *Journal of Science and Research: Revista Ciencia e Investigación*, 5(1), 903-924. Recuperado de: <https://revistas.utb.edu.ec/index.php/sr/article/view/1046>



Rathour, L., Obradovic, D., Tiwari, S. K., Mishra, L. N., & Mishra, V. N. (2023). Trigonometric Functions and Some Trigonometrical Identities. *Computational Algorithms and Numerical Dimensions*, 2(1), 1-6. <https://doi.org/10.22105/cand.2023.382247.1039>

Sánchez Tiol, E. (2015). *Implementación de estrategias didácticas mediante el uso de la tecnología para el aprendizaje significativo de identidades trigonométricas* [Tesis de Pregrado, Escuela Normal Particular Incorporada Colegio Ensenada]. Repositorio institucional

Vázquez-Bautista, O. (2020). Identidades trigonométricas. *Con-Ciencia Boletín Científico de la Escuela Preparatoria* No. 3, 7(14), 33-34. Recuperado de: <https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/prepa3/article/view/6113>

Vasquez Romero, E. F. (2016). *Enseñanza-aprendizaje de las identidades trigonométricas en grado décimo a través del trabajo con números complejos* [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio institucional

Velásquez Cabrejos, H. S. (2020). Validez y confiabilidad del Test de Zung que categoriza la depresión en adultos mayores zonas de la Región Cajamarca. 2019.[Tesis de Pregrado, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo]. Repositorio institucional.

Williams, B., Onsman, A., & Brown, T. (2010). Exploratory factor analysis: A five-step guide for novices. *Australasian journal of paramedicine*, 8, 1-13. <https://doi.org/10.33151/ajp.8.3.93>

