



Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, Ciudad de México, México.
ISSN 2707-2207 / ISSN 2707-2215 (en línea), marzo-abril 2026,
Volumen 10, Número 2.

https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v10i2

COMPARACIÓN DE MODELOS DE AHUSAMIENTO EN 5 ESPECIES DE PINUS PARA DIFERENTES SITIOS DEL CENTRO DEL ESTADO DE VERACRUZ

**COMPARISON OF TAPER MODEL IN 5 PINUS SPECIES
FOR DIFFERENT SITES IN THE CENTER VERACRUZ
STATE, MEXICO**

David Medina Hernández

Tecnm Instituto Tecnológico Superior de Perote, México

Carlos Cuevas Suárez

Tecnm Instituto Tecnológico Superior de Perote, México

Francisco Hernández Quinto

Tecnm Instituto Tecnológico Superior de Perote, México

DOI: https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v10i2.23156

Comparación de Modelos de Ahusamiento en 5 Especies de Pinus para Diferentes Sitios del Centro del Estado de Veracruz

David Medina Hernández¹david.mh@itsperote.edu.mx<https://orcid.org/0000-0001-9873-3752>Maestría en Planificación de Empresas y
Desarrollo RegionalTecnm Instituto Tecnológico Superior de Perote
México**Carlos Cuevas Suárez**doc-201@itsperote.edu.mx<https://orcid.org/0000-0001-8556-9855>Maestría en Planificación de Empresas y
Desarrollo RegionalTecnm Instituto Tecnológico Superior de Perote
México**Francisco Hernández Quinto**doc-058@itsperote.edu.mx<https://orcid.org/0000-0002-0567-9361>Maestría en Planificación de Empresas y
Desarrollo RegionalTecnm Instituto Tecnológico Superior de Perote
México

RESUMEN

En este trabajo se comparan seis modelos de efectos fijos para determinar una función de perfil para 5 especies de Pinus, ayacahuite, montezumae, patula, pseudostrobus y teocote en diferentes localidades del centro del estado de Veracruz, México, los cuales no cuentan con una manera de generar tablas de volumen diferentes a las convencionales. Mediante la recopilación de muestras no destructivas divididas en seis clases diamétricas, se obtienen los coeficientes de estos modelos ajustados para todos los sitios, empleando el software R y un package de elaboración propia. Se determina la bondad de ajuste con un sistema de calificación que contempla el número de variables del modelo, el valor ajustado de R^2 , la raíz cuadrada del error cuadrático medio, el sesgo promedio y el criterio de información de Akaike y se decide cuál de estos modelos es el más adecuado para cada una de las especies y sitio considerado, en la que dos de ellos se utilizan para obtener una fórmula de volumen mediante una integral definida. Como ejemplo se muestran los resultados completos para cada especie en solo uno de los sitios considerados

Palabras clave: modelos de ahusamiento, bondad de ajuste, R Studio

¹ Autor principal

Correspondencia: david.mh@itsperote.edu.mx

Comparision of Taper Model in 5 Pinus Species for Different Sites in the Center Veracruz State, Mexico

ABSTRACT

This study compares six fixed-effects models for determining a profile function for five Pinus species: ayacahuite, montezumae, patula, pseudostrobus, and teocote, in different locations in central Veracruz, Mexico. These locations lack methods for generating volume tables other than conventional ones. Using non-destructive sampling divided into six diameter classes, the coefficients of these models were obtained for all sites, employing R software and a custom-developed package. The goodness of fit was assessed using a rating system that considered the number of variables in the model, the adjusted R^2 value, the root mean square error, the average bias, and the Akaike information criterion. The most suitable model for each species and site was then selected, and two of the models were used to derive a volume formula via a definite integral. As an example, the complete results are shown for each speices and only one of the sites considered

Keywords: taper models, good of fitness, R studio

Artículo recibido 20 febrero 2026

Aceptado para publicación: 29 marzo 2026



INTRODUCCIÓN

Las funciones de perfil (o ahusamiento) tratan de describir el diámetro de un árbol a través de una o varias medidas determinadas (como diámetro normal, diámetros a diversas alturas y altura total del árbol). En la literatura existen diferentes expresiones matemáticas que se pueden clasificar como lineales, no lineales, segmentados o trigonométricos y que cumplen con propiedades como lo son la diferenciabilidad o que el valor del diámetro sea cero en la altura total de cada árbol (Rodríguez et. al., 2016, Pompa et. al., 2009). Este tipo de expresiones suelen utilizarse para desarrollar tablas de volumen o tarifas de cubicación, empleando para ello técnicas de integración. Estas tablas forman parte de uno de los enfoques para la planificación de la gestión forestal.

Puesto que los ejidos en México, están destinadas entre otros aspectos a la explotación forestal, requieren entonces de planes de manejo o de funciones de perfil para poder determinar la producción de madera que podrían obtener en un determinado predio o lugar. Por otro lado, el pino es la principal conífera de clima templado y frío en México, y en la que las sierras Madre Oriental y Occidental de México se asienta la mayor diversidad (Moctezuma y Flores, 2020) y representa una importancia económica y ecológica relevante en nuestro país. Por lo anterior, se realizaron los estudios correspondientes para determinar funciones de perfil para cinco especies de *Pinus* en diferentes localidades del centro del estado de Veracruz, México, como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1. Especies y localidades consideradas para el estudio.

Especie	Localidades
ayacahuite	Ejido Ingenio el Rosario Ejido Monte Grande
montezumae	Ejido San Juan del Monte Ejido Villa Aldama
patula	Ejido Ingenio el Rosario Ejido Monte Grande Ejido San Juna del Monte
pseudostrobus	Ejido Ingenio el Rosario Ejido Monte Grande Ejido Buenavista
teocote	Ejido las Vigas Ejido los Molinos Ejido San Juan del Monte

Estas funciones son expresiones matemáticas que tratan de describir las tres figuras geométricas que suelen encontrarse de forma regular en un árbol (neiloide, paraboloide y cono), por lo que para este



estudio, se consideraron seis expresiones matemáticas, y mediante regresión (lineal o no lineal) aplicados a un conjunto de mediciones, se obtienen algunas cantidades importantes (que se mencionan más adelante), las que permiten compararlos y de esta manera decidir cuál es la más adecuada. Finalmente, al integrar la mejor expresión entre las propuestas, se obtiene una fórmula para el volumen a cualquier altura empleando la integración de un sólido de revolución.

En la siguiente sección se describen cada una de las etapas de este estudio, consistente en la recolección de datos, obtención del ajuste correspondiente y determinación de los valores así como la significancia estadística de cada uno de los coeficientes del modelo ajustado, la elección del mejor modelo y la fórmula para el cálculo del volumen a cualquier altura.

METODOLOGÍA

Empleando métodos no destructivos se obtuvieron parejas de datos consistentes en diámetro y altura de árboles distribuidas en 6 clases diamétricas, se generaron las estadísticas descriptivas y se elaboró el diagrama de dispersión correspondiente, con el fin de detectar anomalías. Para las estadísticas descriptivas, en las tablas 2 y 3 se muestran sólo el resumen para dos especies y sitios diferentes, en la que d_i representa el diámetro a una altura h_i (con respecto al suelo), D el diámetro normal y H la altura total del árbol. En todos los casos, el diámetro se expresa en centímetros y la altura en metros.

Tabla 2. Estadística descriptiva de la muestra de *Pinus ayacahuite* en el ejido Ingenio el Rosario

Variable	<i>N</i>	Media	Desviación estándar	Mínimo	Máximo
<i>D</i>	22	32.6364	16.66632	6	60
<i>d_i</i>	132	25.5407	16.51726	1.8	67
<i>H</i>	22	17.36364	5.982000	6.5	27.8
<i>h_i</i>	132	7.3985	6.49234	0.3	25.3

Tabla 3. Estadística descriptiva de la muestra de *Pinus montezumae* en el ejido Villa Aldama

Variable	<i>N</i>	Media	Desviación estándar	Mínimo	Máximo
<i>D</i>	53	30.8301887	13.4932118	10	58
<i>d_i</i>	318	23.618674	13.8116921	2.66666667	69
<i>H</i>	53	17.9301887	4.69936923	7.1	26.9
<i>h_i</i>	318	7.37389937	6.1618582	0.3	21.3

Ahora se hace, $p = \left(\frac{d_i}{D}\right)^2$ y $q = \frac{h_i}{H}$, para obtener el diagrama de dispersión correspondiente, los cuales se muestran en las figuras 1 y 2, y se proponen los modelos que se muestran en la tabla 4.



Figura 1. Diagrama de dispersión de las medidas relativas de la muestra de *Pinus ayacahuite* en el ejido Ingenio el Rosario

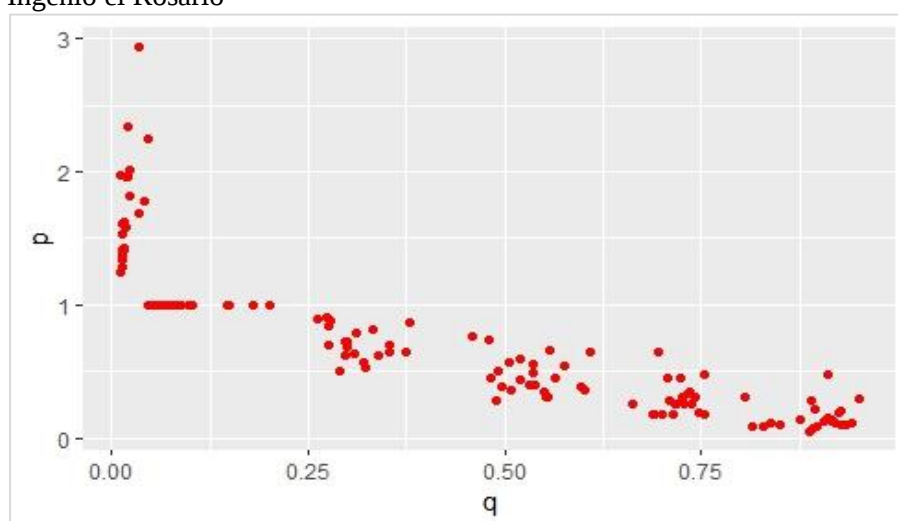


Figura 2. Diagrama de dispersión de las medidas relativas de la muestra de *Pinus montezumae* en el ejido Villa Aldama

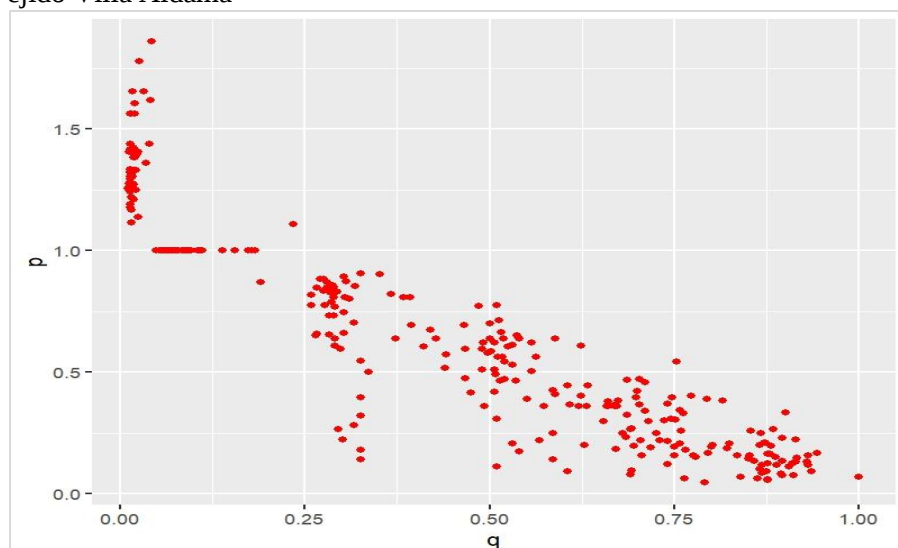


Tabla 4. Modelos propuestos para el estudio.

Modelo	Expresión
1	$p = \beta_1(1 - q) + \beta_2(1 - q)^2 + \beta_3(1 - q)^3$
2	$p = \beta_0 + \beta_1q + \beta_2q^2 + \beta_3q^3 + \beta_4q^4$
3	$p = \beta_1(q - 1) + \beta_2(q^2 - 1)$
4	$p = \beta_0 + \beta_1q + \beta_2q^2 + \beta_3q^3 + \sum_{i=1}^n (q - a_i)_+^3$
5	$p = \beta_1(q - 1) + \beta_2(q^2 - 1) + \beta_3(a_1 - q)^2 I_1$
6	$p = \beta_1(1 - q) + \beta_2(1 - q)^{\beta_3}$

En el modelo 4, el signo + representa la parte positiva de una función, es decir, $\max((q - a_i)^3, 0)$,

mientras que en el modelo 5, $I_1 = \begin{cases} 1, & q \leq a_1 \\ 0, & q > a_1 \end{cases}$. Los valores beta en cada modelo se consideran los

parámetros, por lo que se emplea el método de los mínimos cuadrados (OLS) para ajustar cada uno de los modelos a las muestras dadas.

Una vez obtenido los parámetros de cada modelo, se determina la bondad de su ajuste, para lo cual se utilizan los siguientes criterios (Ramírez, et. al., 2018, Silva, et. al, 2018, Hernández, et. al. 2018, Rodríguez, et. al., 2016, Hernández, et. al., 2013, Honorato, 2011, Novo & Álvarez, 2003).

1. Número de parámetros (k), se refiere a la cantidad de coeficientes a determinar en el modelo.

2. Coeficiente de determinación ajustado, $R_{adj}^2 = 1 - \frac{(n-1) \sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{(n-k) \sum (y_i - \bar{y})^2}$.

3. Raíz del error cuadrático medio, $REMC = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-k}}$.

4. Sesgo promedio, $\bar{E} = \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)}{n}$.

5. Criterio de información de Akaike, AIC .

De acuerdo con un esquema de calificación encontrado en (Ramírez, et. al., 2018) se obtiene el mejor modelo entre los propuestos y en los casos en los que sea aplicable se realizan las pruebas para verificar los supuestos de regresión que son la normalidad de los residuos, autocorrelación y homocedasticidad a través de las pruebas de Shapiro-Wilk, de Durbin-Watson y de Breusch-Pagan respectivamente.

Para este análisis se empleó el programa de análisis estadístico R (R Core Team, 2022) empleando un package de elaboración propia, el cual proporciona mediante una función el *summary* del modelo, el REMC, el sesgo promedio, el AIC y las pruebas mencionadas en el párrafo anterior. En el modelo 4 se establecieron tres *nodos* determinados por los cuantiles de la variable q , utilizando además el paquete *splines* (Bates and Venables, 2017). Para el modelo 5 se estableció como *nodo* su mediana. En el modelo 6 se utiliza el package *nls2* (Grothendieck G., 2022). Las pruebas de Durbin-Watson y de Breusch-Pagan se encuentran en el package *lmtest* (Hothorn T., et. al., 2022). Los resultados obtenidos se muestran en la siguiente sección.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En esta sección se muestra a manera de tablas, el resumen de los parámetros que se consideraron para la bondad de ajuste de cada modelo, para cada especie en solo uno de los sitios citados anteriormente.



Tabla 4. Resumen de parámetros de los modelos para *Pinus ayacahuite* en el ejido Ingenio el Rosario

Modelo	β_j	k	R^2_{adj}	REMC	$\bar{E}$	AIC
1	$\beta_1 = 2.0037$ $\beta_2 = -3.9570$ $\beta_3 = 3.5634$	3	0.9247	0.01309714	-0.001126931	14.69076
2	$\beta_0 = 1.73718$ $\beta_1 = -8.87786$ $\beta_2 = 27.43138$ $\beta_3 = -37.76099$ $\beta_4 = 17.85167$	5	0.8109	1.85×10^{-14}	1.58×10^{-15}	8.808387
3	$\beta_1 = -2.4950$ $\beta_2 = 1.0078$	2	0.9144	0.2343949	0.02024631	30.54262
4	$\beta_0 = 1.6872$ $\beta_1 = -0.2777$ $\beta_2 = -1.0839$ $\beta_3 = -0.9587$ $\beta_4 = -1.4609$ $\beta_5 = -1.5384$ $\beta_6 = -1.5196$	7	0.8072	2.42×10^{-14}	-2.05×10^{-15}	13.25214
5	$\beta_1 = 0.5042$ $\beta_2 = -0.9693$ $\beta_3 = 5.1605$	3	0.9238	0.02639954	0.002271524	16.17133
6	$\beta_1 = 1.02256$ $\beta_2 = 0.86769$ $\beta_3 = 18.69113$	3	0.81773	0.1048056	0.009017898	2.001293

Tabla 5. Resumen de parámetros de los modelos para *Pinus montezumae* en el ejido Villa Aldama

Modelo	β_j	k	R^2_{adj}	REMC	$\bar{E}$	AIC
1	$\beta_1 = 1.5328$ $\beta_2 = -2.0195$ $\beta_3 = 1.8113$	3	0.9642	0.01104762	-0.0006165904	-291.0701
2	$\beta_0 = 1.39415$ $\beta_1 = -5.18479$ $\beta_2 = 14.84017$ $\beta_3 = -20.76345$ $\beta_4 = 9.95152$	5	0.8842	1.30×10^{-14}	7.25×10^{-16}	-308.152
3	$\beta_1 = -1.77102$ $\beta_2 = 0.50831$	2	0.9607	0.1715682	0.009590766	-261.9496
4	$\beta_0 = 1.39021$ $\beta_1 = -0.21058$ $\beta_2 = -0.62861$ $\beta_3 = -0.67443$ $\beta_4 = -1.15041$ $\beta_5 = -1.23736$ $\beta_6 = -1.30947$	7	0.8866	2.17×10^{-14}	1.20×10^{-15}	-312.8536
5	$\beta_1 = -0.4398$ $\beta_2 = -0.3833$ $\beta_3 = 3.1146$	3	0.9645	0.01551091	0.0008656961	-293.2686
6	$\beta_1 = 1.03510$ $\beta_2 = 0.47759$ $\beta_3 = 23.33213$	3	0.8882448	0.06330196	0.003533014	-321.5317

Tabla 6. Resumen de parámetros de los modelos para *Pinus patula* en el ejido Monte Grande

Modelo	β_j	k	R^2_{adj}	REMC	$\bar{E}$	AIC
1	$\beta_1 = 1.1904$ $\beta_2 = -1.8115$ $\beta_3 = 1.9868$	3	0.9393	0.02617435	-0.001584046	-96.34426
2	$\beta_0 = 1.40907$ $\beta_1 = -5.16352$ $\beta_2 = 12.57798$ $\beta_3 = -16.00506$ $\beta_4 = 7.34395$	5	0.8398	3.57×10^{-14}	2.16×10^{-15}	-96.82739
3	$\beta_1 = 2.29519$ $\beta_2 = 0.98889$	2	0.9351	0.1776698	0.01077252	-79.03875
4	$\beta_0 = 1.35556$ $\beta_1 = -0.04694$ $\beta_2 = -0.70906$ $\beta_3 = -0.73459$ $\beta_4 = -1.19523$ $\beta_5 = -1.16972$ $\beta_6 = -1.30922$	7	0.8387	9.74×10^{-15}	5.85×10^{-16}	-93.0739
5	$\beta_1 = -0.71610$ $\beta_2 = -0.06757$ $\beta_3 = 3.20576$	3	0.9393	0.004846108	0.0002932817	-96.4707
6	$\beta_1 = 0.86092$ $\beta_2 = 0.58421$ $\beta_3 = 10.36808$	3	0.8416168	0.0348432	-0.002108676	-101.9469

Tabla 7. Resumen de parámetros de los modelos para *Pinus pseudostrobus* en el ejido Buenavista

Modelo	β_j	k	R^2_{adj}	REMC	$\bar{E}$	AIC
1	$\beta_1 = 1.1265$ $\beta_2 = -1.2584$ $\beta_3 = 1.3551$	3	0.9851	0.010642	-0.001009704	-203.0907
2	$\beta_0 = 1.27121$ $\beta_1 = -4.87298$ $\beta_2 = 14.51890$ $\beta_3 = -21.23855$ $\beta_4 = 10.58556$	5	0.9583	6.88×10^{-15}	-6.46×10^{-18}	-214.5295
3	$\beta_1 = -1.85518$ $\beta_2 = 0.66631$	2	0.9828	0.07869692	0.00750217	-188.5915
4	$\beta_0 = 1.33797$ $\beta_1 = -0.28480$ $\beta_2 = -0.49856$ $\beta_3 = -0.78187$ $\beta_4 = -1.06603$ $\beta_5 = -1.23751$ $\beta_6 = -1.24069$	7	0.9696	1.91×10^{-15}	1.78×10^{-16}	-246.983
5	$\beta_1 = -0.90405$ $\beta_2 = 0.02238$ $\beta_3 = 2.41525$	3	0.9852	0.007252928	0.0006881518	-203.5189
6	$\beta_1 = 0.91511$ $\beta_2 = 0.51604$ $\beta_3 = 31.60464$	3	0.9700178	0.03289604	-0.003121149	-252.1532

Tabla 8. Resumen de parámetros de los modelos para *Pinus teocote* en el ejido los Molinos

Modelo	β_j	k	R_{adj}^2	REMC	$\bar{E}$	AIC
1	$\beta_1 = 1.3468$ $\beta_2 = 1.6038$ $\beta_3 = 1.8095$	3	0.8824	0.06250301	-0.004865018	89.357
2	$\beta_0 = 1.7087$ $\beta_1 = -7.9146$ $\beta_2 = 24.9655$ $\beta_3 = -35.9025$ $\beta_4 = 17.4567$	5	0.7171	3.77×10^{-14}	2.92×10^{-15}	85.11069
3	$\beta_1 = -2.3763$ $\beta_2 = 0.8968$	2	0.8803	0.0720549	0.005626113	91.20553
4	$\beta_0 = 1.55952$ $\beta_1 = -0.07569$ $\beta_2 = -1.06462$ $\beta_3 = -0.57756$ $\beta_4 = -1.48611$ $\beta_5 = -1.37136$ $\beta_6 = -1.54184$	7	0.7157	8.52×10^{-15}	6.54×10^{-16}	87.82798
5	$\beta_1 = -0.8433$ $\beta_2 = -0.1159$ $\beta_3 = 2.7844$	3	0.8825	0.04769633	-0.003712517	89.24002
6	$\beta_1 = 1.07651$ $\beta_2 = 0.66476$ $\beta_3 = 13.14823$	3	0.7167569	0.08217505	-0.006396222	83.35175

También se verificó la significancia al nivel 0.05 de cada una de las variables que se encuentran en cada de los modelos, encontrándose lo que se muestra en la tabla 9.

Tabla 9. Significancia de los parámetros en cada modelo para las zonas y especie en estudio

Especie	Localidad	Significancia de los parámetros
ayacahuite	Ejido Ingenio el Rosario	todos los parámetros significativos excepto en el modelo 5.
	Ejido Monte Grande	Todos los parámetros significativos excepto en el modelo 3.
montezumae	Ejido San Juan del Monte	Todos los parámetros significativos excepto en el modelo 5.
	Ejido Villa Aldama	Todos los parámetros significativos excepto en el modelo 5.
patula	Ejido Ingenio el Rosario	Todos los parámetros significativos en los modelos 1 y 2.
	Ejido Monte Grande	Todos los parámetros significativos excepto en los modelos 2, 4 y 5.
	Ejido San Juan del Monte	Todos los parámetros significativos excepto en el modelo 5.
pseudostrobus	Ejido Ingenio el Rosario	Todos los parámetros significativos excepto en el modelo 5.
	Ejido Monte Grande	Todos los parámetros significativos excepto en el modelo 5.
	Ejido Buenavista	Todos los parámetros significativos excepto en el modelo 5.
teocote	Ejido las Vigas	Todos los parámetros significativos excepto en el modelo 5.
	Ejido los Molinos	Todos los parámetros significativos excepto en los modelos 4 y 5.
	Ejido San Juan del Monte	Todos los parámetros significativos excepto en el modelo 5.

Tomando en cuenta todo lo anteriormente dicho, se obtiene que los mejores modelos se encuentran con las expresiones 1 y 2. La tabla 10 muestra los mejores modelos para cada especie y zona en estudio. También se muestran los coeficientes correspondientes a cada modelo.

Tabla 10. Mejores modelos para cada especie y zona

Especie	Ejido	Modelo	Parámetros
ayacahuite	Ingenio el Rosario	1	$\beta_1 = 2.0037$ $\beta_2 = -3.9570$ $\beta_3 = 3.5634$
	Monte Grande	1	$\beta_1 = 2.4497$ $\beta_2 = -3.9422$ $\beta_3 = 2.9434$
montezumae	San Juan del Monte	2	$\beta_0 = 1.53165$ $\beta_1 = -8.03998$ $\beta_2 = 26.65666$ $\beta_3 = -38.47330$ $\beta_4 = 18.71894$
	Villa Aldama	1	$\beta_1 = 1.5328$ $\beta_2 = -2.0195$ $\beta_3 = 1.8113$
patula	Ingenio el Rosario	1	$\beta_1 = 1.4112$ $\beta_2 = -2.0258$ $\beta_3 = 1.9736$
	Monte Grande	1	$\beta_1 = 1.1904$ $\beta_2 = -1.8115$ $\beta_3 = 1.9868$
	San Juan del Monte	2	$\beta_0 = 1.47386$ $\beta_1 = -7.24945$ $\beta_2 = 21.42970$ $\beta_3 = -28.95537$ $\beta_4 = 13.58416$
pseudostrobis	Ingenio el Rosario	1	$\beta_1 = 1.7021$ $\beta_2 = -2.7251$ $\beta_3 = 2.4559$
	Monte Grande	1	$\beta_1 = 1.4631$ $\beta_2 = -2.5073$ $\beta_3 = 2.3983$
	Buнавista	1	$\beta_1 = 1.1265$ $\beta_2 = -1.2584$ $\beta_3 = 1.3551$
teocote	Las Vigas	1	$\beta_1 = 0.8436$ $\beta_2 = -0.7683$ $\beta_3 = 1.1404$
	Los Molinos	1	$\beta_1 = 1.3468$ $\beta_2 = 1.6038$ $\beta_3 = 1.8095$
	San Juan del Monte	2	$\beta_0 = 1.57282$ $\beta_1 = -7.91614$ $\beta_2 = 25.23766$ $\beta_3 = -35.05356$ $\beta_4 = 16.53386$

Ninguno de los modelos lineales cumple con todos los supuestos de regresión, ya que en este estudio se obtienen medidas de un mismo individuo. A pesar de ello, en (Ramírez, et. al., 2018) menciona que se pueden utilizar estos para determinar volumen (en metros cúbicos) entre dos alturas, empleando una integral de un sólido de revolución (Stewart, 2006),

$$V = \pi \int_a^b (r(x))^2 dx,$$

donde $r(x)$ representa el radio a una distancia x . Puesto que el radio es la mitad del diámetro y al convertir esta medida en metros se tiene que para el modelo 1, el volumen entre las alturas h_1 y h_2 con $0 \leq h_1 \leq h_2$, está dado por,

$$V = \frac{\pi}{10000} \int_{h_1}^{h_2} \left(\frac{d}{2}\right)^2 D^2 dh = \frac{\pi D^2}{40000} \int_{h_1}^{h_2} \left(\beta_1 \left(1 - \frac{h}{H}\right) + \beta_2 \left(1 - \frac{h}{H}\right)^2 + \beta_3 \left(1 - \frac{h}{H}\right)^3 \right) dh.$$

Al aplicar el cambio de variable $u = 1 - \frac{h}{H}$, la última integral se transforma en,

$$\begin{aligned} \int_{h_1}^{h_2} \left(\beta_1 \left(1 - \frac{h}{H}\right) + \beta_2 \left(1 - \frac{h}{H}\right)^2 + \beta_3 \left(1 - \frac{h}{H}\right)^3 \right) dh &= \int_{u_1}^{u_2} (\beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3) (-H du) \\ &= H \int_{u_2}^{u_1} (\beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3) du \\ &= H \left(\frac{\beta_1}{2} (u_1 - u_2)^2 + \frac{\beta_2}{3} (u_1 - u_2)^3 + \frac{\beta_3}{4} (u_1 - u_2)^4 \right) \\ &= H \left(\frac{\beta_1}{2} \left(\frac{1}{H^2} (h_2 - h_1)^2 \right) + \frac{\beta_2}{3} \left(\frac{1}{H^3} (h_2 - h_1)^3 \right) + \frac{\beta_3}{4} \left(\frac{1}{H^4} (h_2 - h_1)^4 \right) \right) \\ &= \frac{\beta_1}{2H} (h_2 - h_1)^2 + \frac{\beta_2}{3H^2} (h_2 - h_1)^3 + \frac{\beta_3}{4H^3} (h_2 - h_1)^4. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$V = \frac{\pi D^2}{40000} \left(\frac{\beta_1}{2H} (h_2 - h_1)^2 + \frac{\beta_2}{3H^2} (h_2 - h_1)^3 + \frac{\beta_3}{4H^3} (h_2 - h_1)^4 \right).$$

En el caso de volumen total esta fórmula se reduce a

$$V = \frac{\pi D^2 H}{40000} \left(\frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} + \frac{\beta_3}{4} \right).$$

Para el modelo 2, el volumen está dado por,



$$\begin{aligned}
V &= \frac{\pi}{10000} \int_{h_1}^{h_2} \left(\frac{d}{2}\right)^2 D^2 dh = \frac{\pi D^2}{40000} \int_{h_1}^{h_2} d^2 dh \\
&= \frac{\pi D^2}{40000} \int_{h_1}^{h_2} \left(\beta_0 + \beta_1 \left(\frac{h}{H}\right) + \beta_2 \left(\frac{h}{H}\right)^2 + \beta_3 \left(\frac{h}{H}\right)^3 + \beta_4 \left(\frac{h}{H}\right)^4 \right) dh \\
&= \frac{\pi D^2}{40000} \left[\beta_0 (h_2 - h_1) + \frac{\beta_1}{2H} (h_2 - h_1)^2 + \frac{\beta_2}{3H^2} (h_2 - h_1)^3 + \frac{\beta_3}{4H^3} (h_2 - h_1)^4 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\beta_4}{5H^4} (h_2 - h_1)^5 \right]
\end{aligned}$$

El volumen total está dado por

$$V = \frac{\pi D^2}{40000H} \left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} + \frac{\beta_3}{4} + \frac{\beta_4}{5} \right).$$

CONCLUSIONES

En este documento se compararon seis modelos de efectos fijos para cinco especies de *Pinus* en diferentes sitios del centro del estado de Veracruz, México, a través de un sistema de calificación que considera el número de variables, el valor ajustado de R^2 , el valor REMC, el sesgo promedio y el criterio de información de Akaike (AIC), al obtener un ajuste mediante regresión por mínimos cuadrados ordinarios (OLS), resultando dos de ellos como los más adecuados entre los considerados. Mediante integración se obtiene una fórmula para encontrar el volumen a cualquier altura y obtener de esta manera tablas de volumen a partir de esta información.

También se pueden explorar otras expresiones (de efectos fijos) propuestas por otros autores o metodologías diferentes a los efectos fijos como lo son los modelos mixtos (que forman parte de los denominados generalizados) o los modelos de autoregresión, los cuales tratan de mitigar uno o todos los fallos en los supuestos que son necesarios para aplicar la regresión, y que a pesar de ello, siguen utilizándose para diversos fines.

Los efectos mixtos permiten abordar el hecho que los datos obtenidos son jerárquicos y la correlación especial por tener diferentes mediciones en un mismo fuste, mientras que en los modelos autoregresivos ajustan la covarianza de los residuos, y permitirán explorar en trabajos futuros, funciones de perfil que se puedan ajustar de una mejor manera a ejemplares de especies de cada una de las localidades que se estudiaron aquí.



REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Bates DM, Venables WN. (2017). R Core Team. splines: Regression Spline Functions and Classes. R Package. Vienna, Austria. R Foundation For Statistical Software.
- Grothendieck G. (2022). nls2. R Package. Vienna, Austria. R Foundation For Statistical Software.
- Hernández-Pérez D., De los Santos-Posadas HM, Ángles-Pérez G, Valdéz-Lazalde JR and Volke-Haller VH. (2013). Funciones de ahusamiento y volumen comercial para *Pinus patula* Schltdl et. Cham en Zacualtipán, Hidalgo. *Rev. Mex. Cien. For.* Vol. 4. Núm. 16.
- Hernández-Ramos J, De los Santos-Posadas HM, Valdéz-Lazalde JR, Tamarit-Urias JC, Ángles-Pérez G, Hernández-Ramos A and Peduzzi A. (2018). Funciones de ahusamiento para clones de *Eucalyptus urophylla* establecidos en plantaciones comerciales en Huimanguillo, Tabasco, México. *Agrociencia* 52: 1023-1029.
- Honorato-Salazar JA. (2011). Modelos volumétricos fustales para *Acrocarpus fraxinifolius* & Arn. en plantaciones agroforestales de la Sierra Norte de Puebla, *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*. Vol. 2. Núm. 6. 55-72.
- Hothorn T., Zeileis A., Farebrother RW., Cummings C., Millo G. and Mitchell D. (2022). lmtest. R Package. Vienna, Austria. R Foundation For Statistical Software.
- Moctezuma López Georgel, Flores Andrés. (2020). *Rev. mex. de cienc. forestales* vol.11 no.60 México jul./ago. 2020
- Novo N, Rojo A and Álvarez JG. (2003). Funciones de perfil del tronco y tarifas de cubicación con clasificación de productos para *Pinus Sylvestris* en Galicia. *Invest. Agrar.*: 12 (1). 123-136.
- Pompa García M, Corral Rivas JJ, Díaz Vázquez MA and Martínez Salvador M. (2009). Función de ahusamiento y volumen compatible para *Pinus arizonica* Engelm. en el suroeste de Chihuahua. *Rev. Ciencia Forestal en México*. Vol. 34. Núm. 105.
- Ramírez-Martínez A, Santiago-García W, Quiñonez-Barraza G, Ruiz-Aquino F and Antúnez P. (2018). Modelación del perfil fustal y volumen total para *Pinus ayacahuite* Ehren. *Madera y Bosques*. Vol. 24. Núm 2.
- R Core Team. (2022). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>.



- Rodríguez-Toro A., Rubilar-Pons R., Muñoz-Sáez F., Cártes-Rodríguez E., Acuña-Carmona E. and Cancino-Cancino J. (2016), Modelo de ahusamiento para *Eucalyptus nitens*, en suelos de cenizas volcánicas de la región de la Araucanía (Chile). *REV. FCA ANCUYO*. 48(1): 101-114.
- Silva-González E, Nava-Moreno MA, Hernández FJ, Colín JG. (2018). Funciones compatibles de ahusamiento-volumen para tres especies de *Pinus* en la Unidad de Manejo Forestal 0808 del estado de Chihuahua. *Investigación y Ciencia de la Universidad Autónoma de Aguascalientes*. 26(73). 58-67.
- Stewart J. (2006). Cálculo en una y varias variables. Thomson.

