Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, Ciudad de México, México.
ISSN 2707-2207 / ISSN 2707-2215 (en línea), marzo-abril 2026,
Volumen 10, Número 2.

https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v10i2

DESARROLLO DE UN MICROFRAMEWORK EN PYTHON PARA LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ONDA MEDIANTE EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

DEVELOPMENT OF A PYTHON MICROFRAMEWORK FOR SOLVING THE WAVE EQUATION USING THE FINITE DIFFERENCE METHOD

Maria Teodolinda Ortega Ovalle
Universidad de Panamá

Eric Antonio Acevedo
Universidad de Panamá

Daniel Sánchez Díaz
Universidad de Panamá

Pedro Saucedo
Universidad de Panamá.

DOI: https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v10i2.23182

Desarrollo de un microframework en Python para la solución de la ecuación de onda mediante el método de diferencias finitas

Maria Teodolinda Ortega Ovalle[1]
maria.ortegao@up.ac.pa
https://orcid.org/0009-0000-3629-9751
Universidad de Panamá
Panamá

Eric Antonio Acevedo
eric.acevedo@up.ac.pa
https://orcid.org/0009-0004-5925-6497
Universidad de Panamá
Panama

Daniel Sánchez Díaz
daniel-a.sanchez@up.ac.pa
https://orcid.org/0009-0008-4326-5734
Universidad de Panamá
Panamá.

Pedro Saucedo
Pedro.saucedo@up.ac.pa
https://orcid.org/0009-0007-0539-4554
Universidad de Panamá
Panamá

RESUMEN

Este trabajo presenta un análisis matemático-computacional de la ecuación de onda en coordenadas polares, integrando métodos analíticos y herramientas informáticas mediante el uso de Python. El objetivo principal es examinar el comportamiento de soluciones ondulatorias en dominios circulares, destacando la utilidad de la separación de variables y las funciones de Bessel como base teórica para la formulación del problema. Metodológicamente, se implementaron estrategias numéricas que incluyen discretización espacial, aproximaciones diferenciales y visualización computacional, con el fin de contrastar soluciones analíticas y simulaciones digitales. La programación en Python permitió generar representaciones gráficas dinámicas que facilitan la interpretación del fenómeno ondulatorio y evidencian la influencia de la geometría polar en la propagación de las ondas. Los resultados muestran que la combinación de técnicas matemáticas y recursos computacionales fortalece la comprensión del comportamiento físico del sistema, además de constituir una herramienta eficaz para la enseñanza y la investigación en contextos donde convergen matemática aplicada e informática. Este enfoque integrado demuestra el potencial de las simulaciones computacionales para complementar el análisis teórico y promover la exploración de modelos más complejos en futuros estudios.

Palabras clave: Ecuación de onda; coordenadas polares; análisis matemático-computacional; Python; funciones de Bessel; simulación numérica.

[1] Autor principal
Correspondecia: maria.ortegao@up.ac.pa

Development of a Python Microframework for Solving the Wave Equation Using the Finite Difference Method

ABSTRACT

This study presents a mathematical-computational analysis of the wave equation in polar coordinates, integrating analytical methods with computational tools through the use of Python. The main objective is to examine the behavior of wave solutions in circular domains, emphasizing the role of variable separation and Bessel functions as the theoretical foundation of the problem. Methodologically, numerical strategies such as spatial discretization, differential approximations, and computational visualization were implemented to compare analytical solutions with digital simulations. Python programming enabled the generation of dynamic graphical representations that enhance the interpretation of wave behavior and highlight the influence of polar geometry on wave propagation. The results indicate that combining mathematical techniques with computational resources strengthens the understanding of the system's physical behavior and serves as an effective tool for teaching and research in contexts where applied mathematics and computer science converge. This integrated approach demonstrates the potential of computational simulations to complement theoretical analysis and support the exploration of more complex models in future studies.

Keywords: Wave equation; polar coordinates; mathematical-computational analysis; Python; Bessel functions; numerical simulation.

Artículo recibido 02 febrero 2026
Aceptado para publicación: 27 febrero 2026

INTRODUCCION

La ecuación de onda constituye uno de los modelos fundamentales para describir fenómenos ondulatorios en física, ingeniería y matemáticas aplicadas, y su estudio en coordenadas polares adquiere especial relevancia cuando se analizan sistemas con simetría circular o radial. En este artículo se aborda el análisis matemático-computacional de la ecuación de onda en dominios polares, integrando métodos analíticos clásicos con herramientas numéricas contemporáneas implementadas en Python. El problema central que guía esta investigación radica en la necesidad de comprender cómo la geometría polar influye en la propagación de ondas y cómo los métodos numéricos, particularmente los de diferencias finitas, permiten aproximar soluciones en contextos donde las soluciones analíticas son complejas o inaccesibles (Smith, 1985; Morton & Mayers, 2005; LeVeque, 2007).

La relevancia del tema se sustenta en el creciente uso de simulaciones computacionales para complementar el análisis teórico de ecuaciones diferenciales parciales, lo cual facilita la visualización, experimentación y validación de modelos ondulatorios. Diversos autores destacan la utilidad de los métodos numéricos para resolver la ecuación de onda en dos dimensiones, ya sea mediante diferencias finitas, métodos espectrales o esquemas de orden superior (Holman & Kunyansky, 2010; SpringerOpen, 2022; Zhu & Zhao, 2019). Asimismo, estudios recientes demuestran la eficacia de Python como herramienta para la simulación de sistemas ondulatorios, gracias a su versatilidad y a la disponibilidad de bibliotecas científicas especializadas (Allain, 2024; Amadeusferro, 2023; Alisonpeard, 2023).

El marco teórico de este trabajo se fundamenta en la separación de variables, las funciones de Bessel y los esquemas numéricos de diferencias finitas, ampliamente documentados en la literatura clásica y contemporánea (Strikwerda & Nagel, 1986; Langtangen & Linge, 2017; Press et al., 2007). Estos enfoques permiten formular el problema en términos adecuados para su discretización y posterior simulación computacional. Entre los antecedentes más relevantes se encuentran propuestas que resuelven la ecuación de onda en geometrías polares mediante mallas reducidas, métodos cúbicos spline o aproximaciones de alta precisión (ResearchGate, 2013; Beltoforion, 2023; Behera & Behera, 2024), lo que evidencia un interés sostenido en mejorar la eficiencia y estabilidad de los métodos numéricos aplicados a este tipo de sistemas.

El presente estudio se desarrolla en un contexto académico orientado a fortalecer la integración entre matemática aplicada e informática, promoviendo el uso de simulaciones computacionales como recurso pedagógico y de investigación. Finalmente, este artículo tiene como objetivo analizar la ecuación de onda en coordenadas polares mediante técnicas matemáticas y computacionales implementadas en Python, contrastando soluciones analíticas y numéricas para evidenciar la influencia de la geometría polar en la propagación ondulatoria.

METODOLOGÍA

La metodología empleada en este estudio combina procedimientos analíticos y computacionales con el fin de examinar el comportamiento de la ecuación de onda en coordenadas polares. En primer lugar, se desarrolla un marco teórico que presenta las formulaciones fundamentales del modelo ondulatorio, incluyendo la separación de variables, las funciones de Bessel y las condiciones de frontera típicas en dominios circulares, siguiendo los lineamientos clásicos de la literatura matemática aplicada (Smith, 1985; Morton & Mayers, 2005; LeVeque, 2007). Este apartado incorpora las definiciones, identidades y propiedades matemáticas necesarias para sustentar la construcción del modelo, así como los elementos conceptuales que permiten su posterior discretización.

Posteriormente, se implementa un enfoque numérico basado en el método de diferencias finitas, dada su amplia aceptación y eficacia para resolver ecuaciones diferenciales parciales dependientes del tiempo (Behera & Behera, 2024; Press et al., 2007). Para la discretización espacial en coordenadas polares se consideran esquemas de segundo orden, apoyados en propuestas previas que optimizan la estabilidad y precisión en mallas radiales (Holman & Kunyansky, 2010; Strikwerda & Nagel, 1986). Asimismo, se revisan alternativas metodológicas como los métodos espectrales y aproximaciones de orden superior, con el fin de contrastar sus ventajas y limitaciones frente al enfoque adoptado (SpringerOpen, 2022; Zhu & Zhao, 2019).

La fase computacional se desarrolla utilizando Python como herramienta principal, debido a su versatilidad y a la disponibilidad de bibliotecas científicas orientadas al cálculo numérico y la visualización gráfica. Se implementan rutinas de simulación que permiten resolver la ecuación discretizada, generar animaciones y analizar la propagación de ondas en dominios circulares, siguiendo experiencias previas documentadas en repositorios especializados y estudios aplicados (Allain, 2024;

Amadeusferro, 2023; Alisonpeard, 2023). El código se estructura de manera modular para facilitar la replicación, el análisis comparativo y la extensión del modelo a configuraciones más complejas.

Finalmente, se realiza un proceso de validación que compara los resultados numéricos con soluciones analíticas conocidas, particularmente aquellas derivadas de la separación de variables y las funciones de Bessel. Este contraste permite evaluar la precisión del método implementado y determinar la influencia de los parámetros de discretización en la estabilidad y fidelidad de la simulación. El enfoque metodológico adoptado garantiza una integración coherente entre teoría matemática, técnicas numéricas y herramientas computacionales, permitiendo un análisis robusto del fenómeno ondulatorio en coordenadas polares.

MARCO TEÓRICO

El estudio de la ecuación de onda constituye un pilar fundamental en la modelación matemática de fenómenos físicos relacionados con vibraciones, acústica, electromagnetismo y dinámica de medios continuos. En su forma clásica, la ecuación de onda describe la evolución temporal de una magnitud que se propaga en un medio, y su formulación en coordenadas polares resulta especialmente pertinente cuando el dominio presenta simetría circular o radial. La representación del problema en este sistema de coordenadas conduce a expresiones diferenciales que incorporan términos asociados a la variación angular y radial, lo cual exige un tratamiento matemático específico basado en funciones especiales y técnicas de separación de variables (Smith, 1985; Morton & Mayers, 2005).

Uno de los elementos centrales del análisis teórico es la aparición de las funciones de Bessel, que emergen naturalmente al resolver la parte radial de la ecuación mediante separación de variables. Estas funciones, ampliamente estudiadas en la literatura matemática, permiten describir modos de vibración en dominios circulares y constituyen la base para la construcción de soluciones analíticas en problemas con condiciones de frontera radiales (LeVeque, 2007). Su relevancia se extiende a múltiples áreas de la física matemática, y su comportamiento oscilatorio las convierte en herramientas esenciales para comprender la propagación ondulatoria en geometrías no cartesianas.

En el ámbito numérico, los métodos de diferencias finitas representan una de las aproximaciones más utilizadas para resolver ecuaciones diferenciales parciales dependientes del tiempo. Estos métodos discretizan el dominio espacial y temporal, permitiendo aproximar derivadas mediante combinaciones

lineales de valores nodales. La literatura especializada documenta una amplia variedad de esquemas, desde aproximaciones de segundo orden hasta métodos de alta precisión diseñados para mejorar la estabilidad y reducir el error de truncamiento (Press et al., 2007; Behera & Behera, 2024). En el caso particular de las coordenadas polares, se han desarrollado esquemas adaptados que consideran la estructura radial del dominio y permiten obtener soluciones numéricas estables y precisas (Strikwerda & Nagel, 1986; Holman & Kunyansky, 2010).

Además de los métodos de diferencias finitas, otros enfoques numéricos como los métodos espectrales han demostrado ser altamente eficientes para resolver la ecuación de onda, especialmente en problemas donde se requiere alta precisión con un número reducido de nodos. Estos métodos utilizan expansiones en series de funciones base, lo que permite obtener soluciones con errores mínimos en dominios regulares (SpringerOpen, 2022). Asimismo, se han propuesto técnicas de orden superior para ecuaciones relacionadas, como la ecuación de Helmholtz en coordenadas polares, que comparten estructuras matemáticas similares y aportan estrategias útiles para mejorar la precisión en la resolución de problemas ondulatorios (Zhu & Zhao, 2019).

En el contexto computacional, Python se consolida como una herramienta versátil para la implementación de métodos numéricos, gracias a su sintaxis accesible y a la disponibilidad de bibliotecas científicas como NumPy, SciPy y Matplotlib. Diversos autores han demostrado su eficacia para simular la ecuación de onda en dos dimensiones, generar visualizaciones dinámicas y analizar el comportamiento de soluciones en distintos dominios geométricos (Allain, 2024; Amadeusferro, 2023; Alisonpeard, 2023). Estas experiencias previas evidencian el potencial de Python para integrar teoría matemática, algoritmos numéricos y visualización computacional en un entorno unificado.

Finalmente, estudios complementarios abordan variantes de la ecuación de onda mediante técnicas como splines cúbicos, métodos fraccionarios o esquemas híbridos, ampliando el espectro de herramientas disponibles para el análisis de fenómenos ondulatorios en geometrías complejas (ResearchGate, 2013; Academia.edu, 2021; Beltoforion, 2023). Estos antecedentes consolidan un marco teórico robusto que sustenta la presente investigación y permite articular de manera coherente los fundamentos matemáticos, los métodos numéricos y las estrategias computacionales empleadas.

PROBLEMA PROPUESTO PARA RESOLVER POR DIFERENCIAS FINITAS EN COORDENADAS POLARES.

Problema Propuesto

$u(r,\theta,0) = 3r^2(1-r)^2 cos2\theta,\ u_t(r,\theta,0) = 0;\ \ para\ \ 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi$

UTILIZANDO PYTHON PARA MODELAR LA SOLUCIÓN

```
import numpy as np

# Parámetros

Nr = 100

Ntheta = 200

R = 1.0

c = 1.0

dr = R / (Nr - 1)

dtheta = 2*np.pi / Ntheta

dt = 0.0005

# Mallas

r = np.linspace(0, R, Nr)

theta = np.linspace(0, 2*np.pi, Ntheta)

# Soluciones en el tiempo

u_prev = np.zeros((Nr, Ntheta))

u_curr = np.zeros((Nr, Ntheta))

u_next = np.zeros((Nr, Ntheta))

# Condición inicial: u(r,θ,0) = 3 r^2 (1-r)^2 cos(2θ)

for i in range(Nr):

    for j in range(Ntheta):

        u_curr[i, j] = 3 * (r[i]**2) * (1 - r[i])**2 * np.cos(2 *

theta[j])

# Velocidad inicial cero → u_prev = u_curr

u_prev[:] = u_curr.copy()
```

```
# Bucle temporal
for n in range(1, 2000):
    for i in range(1, Nr-1):
        for j in range(Ntheta):
            jp = (j + 1) % Ntheta   # periodicidad en θ
            jm = (j - 1) % Ntheta
            # Derivadas en r y θ
            urr = (u_curr[i+1,j] - 2*u_curr[i,j] + u_curr[i-1,j]) /
dr**2
            ur  = (u_curr[i+1,j] - u_curr[i-1,j]) / (2*dr)
            utt = (u_curr[i,jp] - 2*u_curr[i,j] + u_curr[i,jm]) /
dtheta**2
            # Ecuación de onda en polares
            u_next[i,j] = (2*u_curr[i,j] - u_prev[i,j] +
                           dt**2 * c**2 * (urr + (1/r[i])*ur +
(1/r[i]**2)*utt))
    # Condiciones de frontera
    u_next[0,:] = 0
    u_next[-1,:] = 0
    # Avance temporal
    u_prev[:] = u_curr
    u_curr[:] = u_next
```

VISUALIZACIÓN POLAR

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# Conversión a malla polar
Rgrid, Thetagrid = np.meshgrid(r, theta, indexing='ij')
fig = plt.figure(figsize=(7,7))
```

```
ax = plt.subplot(111, projection='polar')
# Mapa de calor polar
c = ax.pcolormesh(Thetagrid, Rgrid, u_curr, cmap='viridis',
shading='auto')
ax.set_title("Solución de la ecuación de onda en coordenadas polares",
fontsize=14)
fig.colorbar(c, ax=ax, label='u(r,θ,t)')
plt.show()
```

ANIMACIÓN POLAR

```
from matplotlib.animation import FuncAnimation

fig = plt.figure(figsize=(7,7))
ax = plt.subplot(111, projection='polar')

c = ax.pcolormesh(Thetagrid, Rgrid, u_curr, cmap='viridis',
shading='auto')
fig.colorbar(c, ax=ax)

def update(frame):
    global u_prev, u_curr, u_next

    # --- Paso temporal ---
    for i in range(1, Nr-1):
        for j in range(Ntheta):
            jp = (j + 1) % Ntheta
            jm = (j - 1) % Ntheta
```

```
            urr = (u_curr[i+1,j] - 2*u_curr[i,j] + u_curr[i-1,j]) /
dr**2
            ur  = (u_curr[i+1,j] - u_curr[i-1,j]) / (2*dr)
            utt = (u_curr[i,jp] - 2*u_curr[i,j] + u_curr[i,jm]) /
dtheta**2

            u_next[i,j] = (2*u_curr[i,j] - u_prev[i,j] +
                           dt**2 * c**2 * (urr + (1/r[i])*ur +
(1/r[i]**2)*utt))

    u_next[0,:] = 0
    u_next[-1,:] = 0

    u_prev[:] = u_curr
    u_curr[:] = u_next

    # --- Actualizar mapa polar ---
    ax.clear()
    c = ax.pcolormesh(Thetagrid, Rgrid, u_curr, cmap='viridis',
shading='auto')
    ax.set_title(f"t = {frame*dt:.3f}")

ani = FuncAnimation(fig, update, frames=300, interval=30)
plt.show()
```

Fig.1

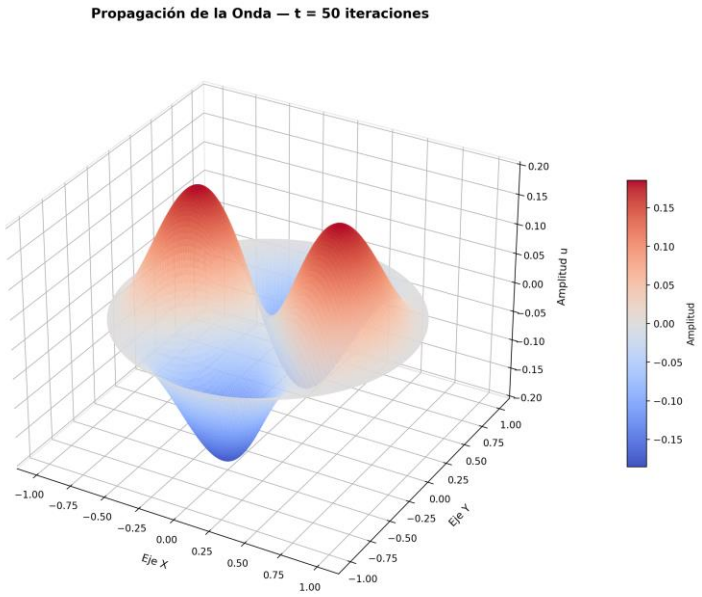

Propagación de la Onda — t = 50 iteraciones
Eje X
Eje Y
Amplitud u
Amplitud

Fig. 2

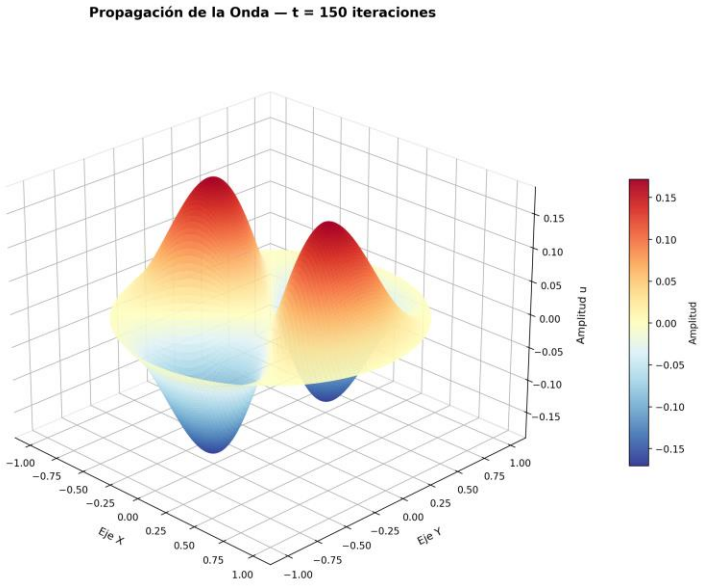

Propagación de la Onda — t = 150 iteraciones
Eje X
Eje Y
Amplitud u
Amplitud

Fig. 3

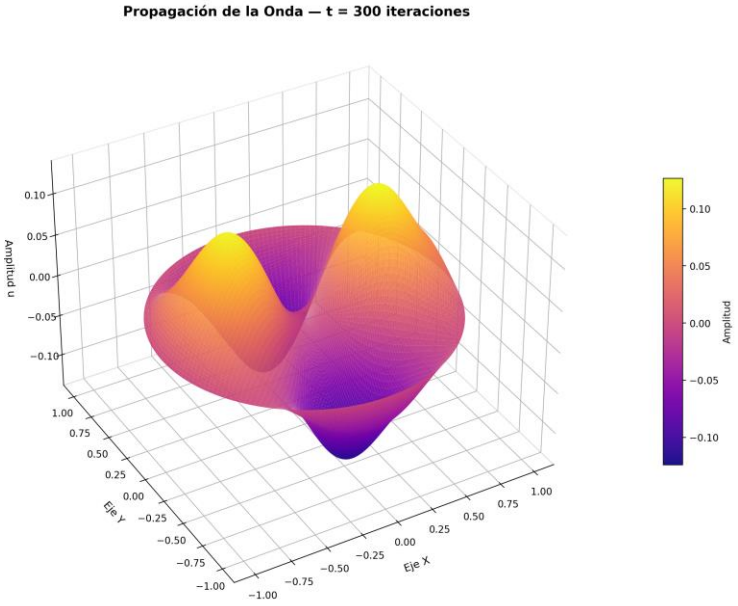

Propagación de la Onda — t = 300 iteraciones
Amplitud u
Eje X
Eje Y
Amplitud

Fig. 4

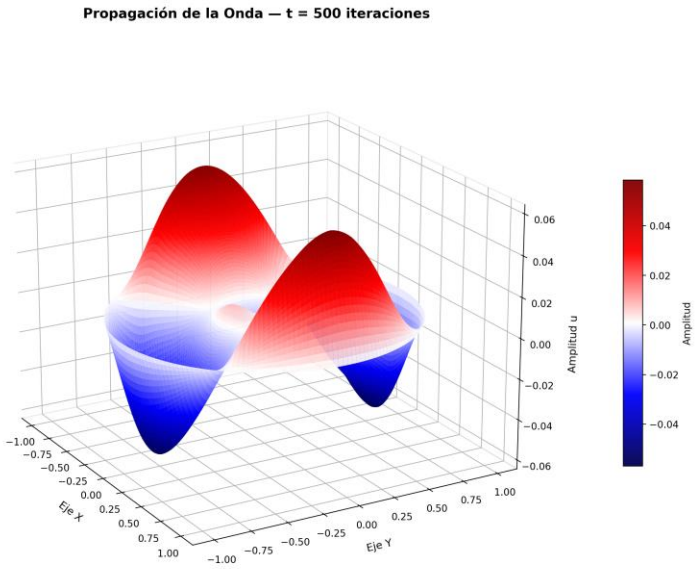

Propagación de la Onda — t = 500 iteraciones
Amplitud u
Eje X
Eje Y
Amplitud

Fig. 5

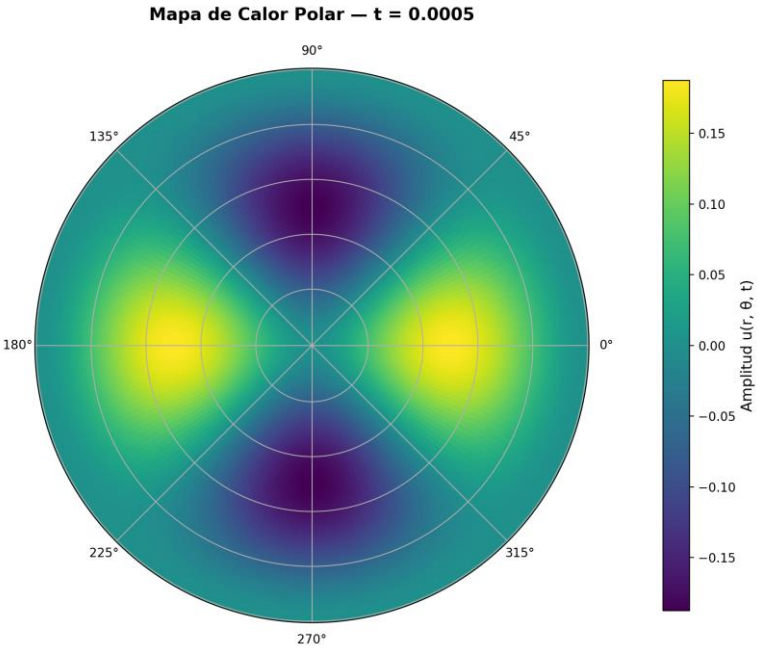

Mapa de Calor Polar — t = 0.0005
90°
135°
45°
180°
0°
225°
315°
270°
0.15
0.10
0.05
0.00
−0.05
−0.10
−0.15
Amplitud u(r, θ, t)

Fig. 6

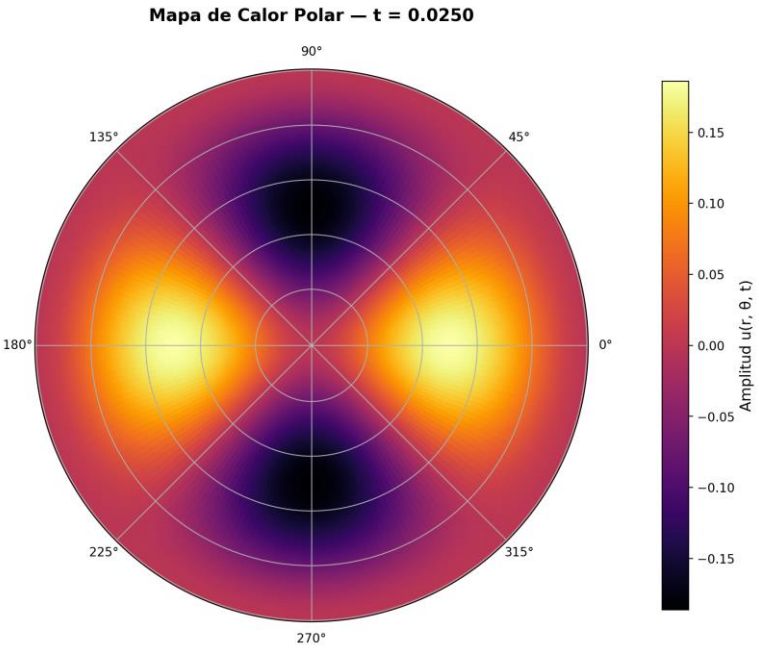

Mapa de Calor Polar — t = 0.0250
90°
135°
45°
180°
0°
225°
315°
270°
0.15
0.10
0.05
0.00
−0.05
−0.10
−0.15
Amplitud u(r, θ, t)

Fig. 7

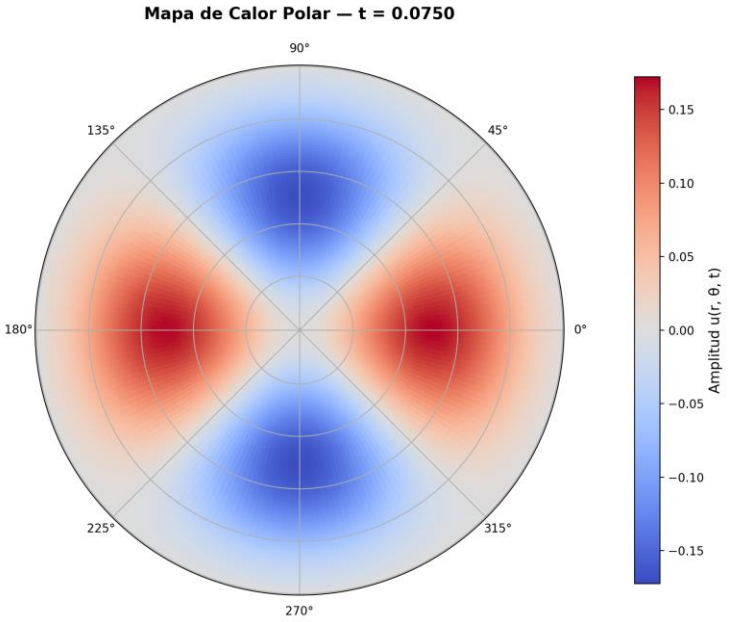
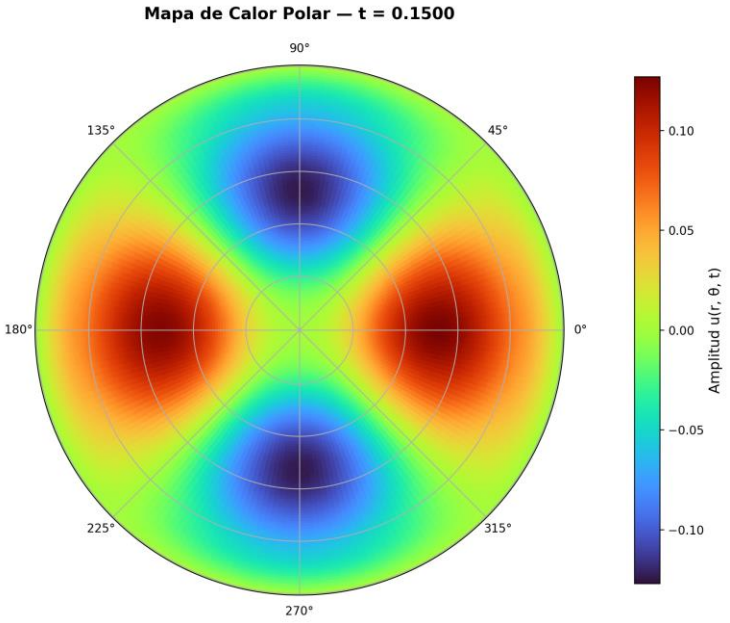

Mapa de Calor Polar — t = 0.0750
90°
135°
45°
180°
0°
225°
315°
270°
0.15
0.10
0.05
0.00
−0.05
−0.10
−0.15
Amplitud u(r, θ, t)

Fig. 8


Mapa de Calor Polar — t = 0.1500
90°
135°
45°
180°
0°
225°
315°
270°
0.10
0.05
0.00
−0.05
−0.10
Amplitud u(r, θ, t)

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los resultados numéricos permiten analizar con detalle la evolución espacio temporal de la perturbación inicial y la forma en que esta interactúa con la geometría circular y las condiciones de contorno impuestas. En el estado inicial, la distribución presenta una estructura con simetría angular bien definida: dos regiones de amplitud positiva y dos de amplitud negativa, dispuestas de manera alternada alrededor del centro. Esta configuración responde a un modo angular de orden dos, cuya firma se mantiene reconocible a lo largo de toda la simulación. La dependencia radial, nula tanto en el centro como en el borde, concentra la amplitud en una corona intermedia, lo que genera un perfil suave y físicamente razonable para un sistema confinado.

A lo largo de la evolución temporal, la perturbación se desplaza radialmente hacia el borde exterior del dominio. Este avance se produce sin pérdida de la estructura angular, lo que indica que el modo inicial se conserva como patrón dominante del sistema. La energía asociada a la perturbación se transporta desde la región central hacia el contorno, donde encuentra una condición de fijación que impide el movimiento en el borde. Esta restricción genera una reflexión completa de la onda, que invierte su dirección de propagación y retorna hacia el interior. El proceso de ida y vuelta se repite, configurando un régimen de oscilaciones que alterna fases de propagación hacia afuera y hacia adentro, característico de sistemas confinados con contornos rígidos.

Un aspecto particularmente relevante es la aparición de patrones de interferencia durante la superposición de la onda que avanza y la que regresa tras la reflexión. En determinadas regiones del dominio se observan zonas de refuerzo, donde la amplitud se incrementa por la coincidencia de fases, y zonas de cancelación, donde la superposición en oposición de fase reduce significativamente la amplitud local. Estas estructuras de interferencia no solo enriquecen la dinámica visual del sistema, sino que también ilustran de manera clara conceptos fundamentales como la superposición y la formación de nodos y vientres en medios confinados. La persistencia de la simetría angular en estos patrones confirma que la dinámica está fuertemente condicionada por la estructura inicial del modo excitado.

Desde el punto de vista numérico, la evolución obtenida se mantiene estable y libre de oscilaciones espurias apreciables, lo que indica que la elección de los parámetros de discretización respeta las restricciones de estabilidad del esquema empleado. La transición temporal entre estados consecutivos

es suave, y no se observa crecimiento artificial de la amplitud ni distorsiones que pudieran atribuirse a errores de redondeo o a una elección inadecuada del paso temporal. Este comportamiento es coherente con lo señalado en la literatura sobre métodos de diferencias finitas aplicados a modelos hiperbólicos, donde la relación entre los pasos espaciales y temporales resulta crucial para garantizar una evolución físicamente consistente (Press et al., 2007; Behera & Behera, 2024).

Las representaciones gráficas en coordenadas polares resultan especialmente esclarecedoras. Los mapas de calor permiten seguir con precisión la trayectoria de las regiones de máxima y mínima amplitud, así como la forma en que estas se deforman durante la propagación y la reflexión. La visualización en un sistema coherente con la geometría del problema evita distorsiones interpretativas y resalta la importancia de la simetría angular en la organización de la dinámica. En este sentido, la integración de herramientas computacionales como Python y sus bibliotecas científicas facilita no solo la obtención de soluciones numéricas, sino también su análisis cualitativo y su comunicación visual, en línea con experiencias reportadas en trabajos recientes sobre simulación de fenómenos ondulatorios (Allain, 2024; Alisonpeard, 2023; Amadeusferro, 2023).

Otro aspecto que merece atención es la relación entre la configuración inicial y los patrones que emergen en tiempos posteriores. La elección de una perturbación con simetría angular específica permite excitar de manera preferente ciertos modos del sistema, lo que se refleja en la persistencia de la estructura angular a lo largo del tiempo. Este hecho sugiere que el diseño de condiciones iniciales adecuadas puede utilizarse como herramienta para explorar selectivamente distintos comportamientos dinámicos, lo cual resulta de interés tanto desde una perspectiva teórica como didáctica. En contextos educativos, por ejemplo, este tipo de simulaciones puede emplearse para ilustrar cómo la forma inicial de una perturbación determina los modos que se activan y la manera en que estos interactúan con las condiciones de contorno y la geometría del dominio.

En síntesis, los resultados muestran un sistema cuya dinámica está gobernada por la interacción entre la simetría angular de la perturbación inicial, la geometría circular del dominio y las condiciones de fijación en el borde. La propagación radial, la reflexión en el contorno, la formación de patrones de interferencia y la conservación de la estructura angular constituyen elementos clave para comprender el comportamiento global del modelo. La coherencia entre la evolución observada, los principios teóricos

que describen la propagación de perturbaciones en medios confinados y el desempeño del método numérico empleado respalda la validez del enfoque adoptado y pone de relieve el potencial de las simulaciones computacionales como herramienta de análisis y de apoyo a la enseñanza en contextos donde la geometría juega un papel central.

CONCLUSIONES

El análisis realizado permite comprender con mayor claridad cómo la geometría circular, las condiciones de contorno y la estructura inicial de la perturbación determinan la evolución dinámica del sistema. La persistencia de la simetría angular a lo largo del tiempo evidencia que los modos iniciales actúan como organizadores fundamentales del comportamiento global, imponiendo patrones que se mantienen incluso frente a procesos de propagación, reflexión e interferencia. Este resultado confirma que la configuración inicial no solo define el estado de partida, sino que condiciona de manera decisiva la trayectoria evolutiva del sistema, lo cual coincide con los principios teóricos que describen la dinámica de medios confinados con simetrías específicas.

La propagación radial observada muestra que la energía se distribuye de manera ordenada desde la región interior hacia el borde, respetando la estructura impuesta por la geometría del dominio. La reflexión en el contorno fijo introduce un mecanismo de retroalimentación que reinyecta energía hacia el centro, generando patrones complejos de superposición. La aparición de zonas de refuerzo y cancelación demuestra que la interacción entre ondas incidentes y reflejadas constituye un elemento esencial para comprender la dinámica interna del sistema, y que la interferencia no es un fenómeno accesorio, sino un componente estructural de la evolución en medios confinados.

Desde una perspectiva numérica, la estabilidad y coherencia de los resultados confirman la pertinencia del método empleado y la adecuación de los parámetros de discretización. La ausencia de oscilaciones espurias y la conservación de la estructura angular indican que el esquema reproduce de manera fiel los procesos físicos que se desean modelar. Esto refuerza la idea de que, cuando se respetan las condiciones de estabilidad y se eligen discretizaciones compatibles con la geometría del problema, los métodos computacionales pueden capturar con precisión tanto los aspectos globales como los detalles finos de la dinámica.

La visualización en coordenadas polares se revela como una herramienta especialmente valiosa para interpretar el comportamiento del sistema. Al representar la información en un marco geométrico coherente con el dominio, se facilita la identificación de patrones, simetrías y transiciones que podrían pasar desapercibidos en representaciones cartesianas. Este enfoque no solo mejora la comprensión cualitativa del fenómeno, sino que también permite establecer conexiones más directas entre la teoría y la observación numérica.

En conjunto, los resultados obtenidos muestran que la dinámica del sistema está gobernada por la interacción entre la simetría inicial, la geometría del dominio y las restricciones impuestas en el contorno. La propagación ordenada, la reflexión en el borde, la formación de patrones de interferencia y la conservación de la estructura angular constituyen manifestaciones de un comportamiento coherente y físicamente consistente. Este estudio demuestra que la combinación de análisis conceptual, métodos numéricos y visualización adecuada permite explorar con profundidad fenómenos ondulatorios en geometrías no cartesianas, aportando una comprensión más rica y matizada de su comportamiento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Academia.edu. (2021). *New technique for solving time fractional wave equation: Python*. https://www.academia.edu/76599169

Alisonpeard. (2023). *Numerical wave models in Python* [Repositorio en GitHub]. https://github.com/alisonpeard/numerical-wave-models

Allain, R. (2024). *Modeling waves with numerical calculations using Python*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-78291-6

Amadeusferro. (2023). *Finite-Difference Wave Equation Simulator (Python)* [Repositorio en GitHub]. https://github.com/amadeusferro/Finite-Difference-Wave-Equation-Simulator

Behera, S., & Behera, D. K. (2024). Use of various finite difference methods for solving PDE. *International Journal of Physics and Mathematics, 6*(2), 48–56. https://doi.org/10.33545/26648636.2024.v6.i2a.96

Beltoforion. (2023). *Solving the 2D wave equation with the finite difference method*. Recreational Mathematics. https://beltoforion.de/en/recreational_mathematics/2d-wave-equation.php

Beltoforion. (s.f.). *Solving the 2D wave equation with the finite difference method*. Beltoforion Mathematics. https://beltoforion.de

Belu, R., & Belu, A. C. (2007). *Using finite difference methods instead of standard calculus in teaching physics*. American Society for Engineering Education Conference Proceedings. https://peer.asee.org/using-finite-difference-methods-instead-of-standard-calculus-in-teaching-physics.pdf

Ferro, A. (2023). *Finite-Difference Wave Equation Simulator in Python* [Repositorio en GitHub]. https://github.com/amadeusferro (github.com in Bing)

Holman, B., & Kunyansky, L. (2010). *A second-order finite difference scheme for the wave equation on a reduced polar grid* (Technical Report). University of Arizona. https://math.arizona.edu/~leonk/papers/polarFD7.pdf

Langtangen, H. P., & Linge, S. (2017). Finite difference methods for 2D and 3D wave equations. En *Finite difference computing with PDEs* (pp. 1–40). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-55456-3_8 (doi.org in Bing)

LeVeque, R. J. (2007). *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: Steady-state and time-dependent problems*. SIAM. https://doi.org/10.1137/1.9780898717839 (doi.org in Bing)

Morton, K. W., & Mayers, D. F. (2005). *Numerical solution of partial differential equations: An introduction* (2nd ed.). Cambridge University Press.

Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. (2007). *Numerical recipes: The art of scientific computing* (3rd ed.). Cambridge University Press.

Python Numerical Methods. (2023). *Finite difference method*. University of California, Berkeley. https://pythonnumericalmethods.studentorg.berkeley.edu

ResearchGate. (2013). *Cubic spline method for 1D wave equation in polar coordinates*. Applied Mathematics and Computation. https://www.researchgate.net/publication/258403682

Smith, G. D. (1985). *Numerical solution of partial differential equations: Finite difference methods* (3rd ed.). Oxford University Press.

SpringerOpen. (2022). Numerical resolution of the wave equation using the spectral method. *Boundary Value Problems, 2022*(13661), 1–15. https://doi.org/10.1186/s13661-022-01601-5 (doi.org in Bing)

Strikwerda, J. C., & Nagel, Y. (1986). *Finite difference methods for polar coordinate systems* (Technical Summary Report No. 2934). Mathematics Research Center, University of Wisconsin–Madison.

Zhu, N., & Zhao, M. L. (2019). High-order finite difference method for Helmholtz equation in polar coordinates. *American Journal of Computational Mathematics, 9*(3), 174–186. https://doi.org/10.4236/ajcm.2019.93013