



Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, Ciudad de México, México.
ISSN 2707-2207 / ISSN 2707-2215 (en línea), septiembre-octubre 2026,
Volumen 10, Número 5.

https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v10i5

IMPACTO DEL USO DE GEOGEBRA EN LA COMPRENSIÓN GEOMÉTRICA DE LA DEFINICIÓN FORMAL DE LÍMITE

**IMPACT OF USING GEOGEBRA ON THE GEOMETRIC
UNDERSTANDING OF THE FORMAL DEFINITION OF LIMIT**

Marco Antonio Ayala Chauvin

Universidad Técnica Particular de Loja, Ecuador

Richard Leonardo Luna Romero

Universidad Técnica Particular de Loja, Ecuador

Felix Gabriel Ordoñez Sanchez

Universidad Técnica Particular de Loja, Ecuador

Jennifer Valeria Quezada Guajala

Universidad Técnica Particular de Loja, Ecuador

Kerly Milena Gallo Cando

Universidad Técnica Particular de Loja, Ecuador

DOI: https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v10i5.26242

Impacto del uso de GeoGebra en la Comprensión Geométrica de la Definición Formal de Límite

Marco Antonio Ayala Chauvin¹maayala5@utpl.edu.ec<https://orcid.org/0000-0002-0084-6773>Universidad Técnica Particular de Loja
Ecuador**Richard Leonardo Luna Romero**rluna@utpl.edu.ec<https://orcid.org/0009-0008-8832-7898>Universidad Técnica Particular de Loja
Ecuador**Felix Gabriel Ordoñez Sanchez**fgordonez2@utpl.edu.ec<https://orcid.org/0009-0003-0131-6656>Universidad Técnica Particular de Loja
Ecuador**Jennifer Valeria Quezada Guajala**jvquezada4@utpl.edu.ec<https://orcid.org/0009-0007-3718-6485>Universidad Técnica Particular de Loja
Ecuador**Kerly Milena Gallo Cando**kmgallo3@utpl.edu.ec<https://orcid.org/0000-0002-7757-9423>Universidad Técnica Particular de Loja
Ecuador

RESUMEN

La presente investigación evaluó el impacto del software interactivo GeoGebra en la comprensión geométrica de la definición formal (ε - δ) de límite en estudiantes universitarios de Análisis Matemático Univariado de la carrera de Ingeniería Civil en la Universidad Técnica Particular de Loja (Ecuador). El estudio adoptó un enfoque cuantitativo con alcance descriptivo-explicativo y un diseño cuasiexperimental de un solo grupo con pretest y posttest ($n = 19$). La intervención didáctica, fundamentada en la teoría de registros semióticos de Duval, se desarrolló durante dos semanas de manera tradicional y durante una semana mediante applets dinámicos diseñados para vincular analítica y visualmente funciones polinómicas, racionales y con radical. Los resultados del diagnóstico inicial reflejaron que el 78,94% de los participantes se ubicó en los niveles deficiente y regular. Tras la intervención, el 78,95% alcanzó las categorías de bueno y excelente. La prueba de rangos con signo de Wilcoxon confirmó diferencias estadísticamente significativas entre ambas evaluaciones ($Z = -3,152$; $p = 0,002$). Se concluye que GeoGebra constituye un andamiaje didáctico eficaz que optimiza la conversión semiótica y afianza el aprendizaje riguroso del cálculo.

Palabras clave: geogebra, definición de límite, registros semióticos, cálculo diferencial, educación superior

¹ Autor principal.

Correspondencia: maayala5@utpl.edu.ec

Impact of Using GeoGebra on the Geometric Understanding of the Formal Definition of Limit

ABSTRACT

This research evaluated the impact of the interactive software GeoGebra on the geometric comprehension of the formal (ε - δ) definition of limit among undergraduate students enrolled in Univariate Mathematical Analysis in the Civil Engineering program at Universidad Técnica Particular de Loja (Ecuador). The study adopted a quantitative approach with a descriptive-explanatory scope and a single-group pretest-posttest quasi-experimental design ($n = 19$). The pedagogical intervention, grounded in Duval's theory of semiotic registers of representation, was conducted for two weeks using a traditional approach and for one week through dynamic applets designed to analytically and visually connect polynomial, rational, and radical functions. Initial diagnostic results revealed that 78.94% of the participants scored within the poor and fair performance levels. Following the intervention, 78.95% reached the good and excellent categories. The Wilcoxon signed-rank test confirmed statistically significant differences between both assessments ($Z = -3.152$; $p = 0.002$). It is concluded that GeoGebra serves as an effective instructional scaffolding that optimizes semiotic conversion and fosters rigorous calculus learning.

Keywords: geogebra, limit definition, semiotic registers, differential calculus, higher education

Artículo recibido 10 agosto 2026

Aceptado para publicación: 22 setiembre 2026



INTRODUCCIÓN

La presente investigación analiza el impacto del software interactivo GeoGebra en la comprensión geométrica de la definición formal de límite en estudiantes de la asignatura Análisis Matemático Univariado, correspondiente a la carrera de Ingeniería Civil de la Universidad Técnica Particular de Loja (Ecuador). El estudio se fundamenta en una de las dificultades más recurrentes en la enseñanza inicial del cálculo: la asimilación conceptual de la definición formal (ε - δ) de límite. Este obstáculo epistemológico se origina en la naturaleza abstracta del concepto matemático, el cual exige a los estudiantes visualizar en el plano cartesiano su comportamiento geométrico; es decir, observar la aproximación infinitesimal hacia un valor sin llegar a alcanzarlo (Munyaruhengeri et al., 2024). Dicha complejidad no solo incide en el aprendizaje de los estudiantes, sino que representa un reto pedagógico constante para los docentes al momento de transformar este objeto formal en representaciones accesibles y significativas (ALAM, 2020).

En el proceso de aprendizaje, esta dificultad se manifiesta de manera recurrente en la incapacidad de los estudiantes para deducir un valor concreto de delta (δ) a partir de un epsilon (ε) dado, así como para establecer una relación algebraica general entre ambos parámetros y dotarla de un significado geométrico en el plano cartesiano. Dichas limitaciones conceptuales suelen agravarse debido a vacíos en conocimientos previos fundamentales del álgebra, específicamente en el manejo de las desigualdades y las propiedades del valor absoluto.

Por consiguiente, abordar esta problemática resulta fundamental, dado que el concepto de límite y su interpretación geométrica constituyen la piedra angular del cálculo infinitesimal. Comprender con solidez este objeto matemático resulta indispensable para abordar con éxito los contenidos subsiguientes de la asignatura, tales como la derivada y la integral definida; de lo contrario, la falta de dominio en la formalización del límite generará serios obstáculos cognitivos en el aprendizaje de dichos conceptos.

Para comprender y superar estas barreras de aprendizaje, la teoría de los registros de representación semiótica, formulada por Raymond Duval, proporciona un marco conceptual idóneo (Lizana Chauca y Antezana Iparraguirre, 2021). Desde este enfoque, los objetos matemáticos —al ser intrínsecamente abstractos y carecer de una existencia física tangible— no pueden percibirse de manera directa, por lo que su comprensión conceptual depende de su articulación en diversos sistemas semióticos.



En consecuencia, un aprendizaje significativo exige que el estudiante desarrolle la capacidad de realizar conversiones entre distintos registros; por ejemplo, pasar de la expresión algebraica de la definición formal de límite a su configuración geométrica en el plano, y viceversa, interpretando la gráfica para deducir las relaciones simbólicas involucradas.

Bajo esta perspectiva teórica, el presente estudio integra el software interactivo GeoGebra con el fin de abordar las dificultades que manifiestan los estudiantes al vincular la formulación algebraica de la definición formal de límite con su respectiva representación gráfica. Este entorno de matemática dinámica, creado por Hohenwarter y Jones (2007), combina las capacidades de un Sistema de Álgebra Computacional (CAS), orientado al tratamiento simbólico de funciones, ecuaciones e inecuaciones, con las herramientas de la geometría dinámica en una misma interfaz bidireccional. Dicha articulación simultánea permite conectar la vista algebraica con la vista gráfica en tiempo real, facilitando que el alumnado observe cómo las variaciones analíticas en los parámetros ε y δ modifican instantáneamente los entornos y vecindades en el plano cartesiano, lo que promueve el establecimiento de generalizaciones y una comprensión conceptual sólida (Dana-Picard y Kovács, 2021).

Diversas investigaciones respaldan el impacto favorable de GeoGebra en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En el ámbito de la educación secundaria, YILMAZ ASLAN et al. (2026) demostraron que este software facilita la materialización de conceptos abstractos, fortalece la comprensión conceptual y la motivación, a la vez que propicia actitudes positivas hacia la disciplina. Por su parte, en el nivel universitario, Bekene Bedada y Machaba (2022) evaluaron el efecto de GeoGebra en el aprendizaje del cálculo, evidenciando que los estudiantes que interactuaron con la herramienta lograron un rendimiento significativamente superior frente a quienes recibieron una instrucción tradicional. De forma concordante, Hernández Culcay (2025) analizó la comprensión geométrica del límite en estudiantes de segundo año de bachillerato, concluyendo que la incorporación de entornos dinámicos para la visualización gráfica genera una mejora sustancial en el desempeño académico.

A diferencia de los estudios antes citados, enfocados predominantemente en el nivel de bachillerato (Hernández Culcay, 2025; YILMAZ ASLAN et al., 2026) o en contenidos generales de cálculo (Bekene Bedada y Machaba, 2022), la presente investigación contribuye a la literatura al situarse en el contexto



universitario de la formación de ingenieros civiles. El aporte distintivo radica en focalizar la intervención en la definición formal $\varepsilon - \delta$ bajo la teoría de registros semióticos de Duval, posibilitando que los estudiantes interactúen simultáneamente con las vistas algebraica y geométrica en GeoGebra para superar la brecha existente entre las desigualdades presentadas en la definición formal y su correspondiente interpretación geométrica de vecindad.

Bajo estas premisas, la investigación se contextualiza en el sistema de Educación Superior del Ecuador, específicamente en la Universidad Técnica Particular de Loja (UTPL), con estudiantes de primer semestre de la carrera de Ingeniería Civil matriculados en la asignatura de Análisis Matemático Univariado. En este entorno académico, los estudiantes procedentes del Bachillerato General Unificado (BGU) afrontan una transición académica compleja, marcada por vacíos en contenidos esenciales del álgebra elemental, tales como la resolución de desigualdades, las propiedades del valor absoluto y el análisis de funciones. A nivel curricular, la materia exige un salto cualitativo hacia el rigor analítico y abstracto, indispensable para el posterior abordaje de el cálculo multivariable, las ecuaciones diferenciales y la modelación matemática, componentes clave de su perfil de egreso. De este modo, la propuesta se alinea con las directrices institucionales de innovación docente de la UTPL relativas a la incorporación de Tecnologías del Aprendizaje y el Conocimiento (TAC), evaluando el potencial de GeoGebra como puente cognitivo para articular el registro algebraico formal con su representación geométrica.

A partir de la problemática expuesta y bajo la fundamentación de los registros semióticos de Duval, el objetivo general de esta investigación es evaluar el impacto del software interactivo GeoGebra en la comprensión geométrica de la definición formal de límite ($\varepsilon - \delta$) en estudiantes de Análisis Matemático Univariado de la carrera de Ingeniería Civil en la Universidad Técnica Particular de Loja (UTPL). De manera específica, el estudio se orienta a:

- Diagnosticar las dificultades iniciales en la conversión de registros algebraico y geométrico de límites
- Diseñar e implementar una intervención didáctica mediada por GeoGebra para la exploración dinámica de la definición formal de límite.



- Analizar los cambios en el rendimiento académico y la comprensión conceptual de la definición formal de límite tras la aplicación de la herramienta digital.

En consonancia con estos propósitos, se formulan las siguientes hipótesis de investigación:

H_1 : El uso de GeoGebra influye de manera significativa en la comprensión geométrica y en la capacidad de conversión entre los registros algebraico y gráfico de la definición formal de límite.

H_0 : El uso de GeoGebra no influye de manera significativa en la comprensión geométrica ni en la capacidad de conversión entre los registros algebraico y gráfico de la definición formal de límite.

METODOLOGÍA

Para el desarrollo del presente estudio se adoptó un enfoque cuantitativo, orientado a la recolección sistemática de datos numéricos y al análisis estadístico inferencial, lo cual permite contrastar las hipótesis formuladas y evaluar empíricamente el impacto de la intervención didáctica (Acosta, 2023; Vizcaíno et al., 2023).

En cuanto al alcance, la investigación se definió como descriptiva y explicativa. Por una parte, asumió un carácter descriptivo al identificar y caracterizar de manera diagnóstica las dificultades y propiedades asociadas con la comprensión de la definición formal de límite (Coronel, 2023). Por otra parte, adquirió un alcance explicativo al orientarse a determinar la relación de causa y efecto entre la variable independiente, correspondiente al uso didáctico de GeoGebra, y la variable dependiente, referida a la comprensión geométrica del límite, verificando que los cambios observados en el desempeño estudiantil respondieran a la intervención implementada (Corona y Fonseca, 2022).

Asimismo, el diseño de la investigación fue cuasiexperimental, con pretest y posttest aplicado a un solo grupo. Esta decisión metodológica se fundamentó en la imposibilidad de aleatorizar a los sujetos experimentales, dado que la intervención se efectuó con una muestra ya conformada institucionalmente dentro de un paralelo de Análisis Matemático Univariado (Gavilánez Luna, 2021).

La población estuvo conformada por 60 estudiantes, distribuidos en dos paralelos de 30 alumnos de la asignatura de Análisis Matemático Univariado de la carrera de Ingeniería Civil en la Universidad Técnica Particular de Loja (Ecuador), durante el período académico octubre 2025–febrero 2026. A partir de este universo, se seleccionó una muestra no probabilística por conveniencia constituida por 19 estudiantes pertenecientes al paralelo asignado institucionalmente para el estudio, quienes completaron



la totalidad de las fases e instrumentos de evaluación (Hernández, 2021). Este tipo de muestreo respondió a criterios de accesibilidad y viabilidad operativa dentro del calendario curricular, garantizando la continuidad en la recolección de las mediciones pretest y postest.

Para la recolección de los datos, se utilizó como técnica la evaluación pedagógica mediante un cuestionario estructurado de tres preguntas, diseñado específicamente para valorar la conversión bidireccional entre los registros gráfico y algebraico de la definición de límite. Con el propósito de sistematizar los resultados del pretest y del postest, la información recabada se organizó en dos escalas de valoración, una cuantitativa y otra cualitativa, conforme se detalla en la Tabla 1 (Flores Perez et al., 2025).

Tabla 1 Escala de calificaciones

Cualitativa	Cuantitativa
Deficiente	0 – 3,99 puntos
Regular	4 – 6,99 puntos
Bueno	7 – 8,99 puntos
Excelente	9 – 10 puntos

Los datos recolectados fueron procesados mediante el paquete estadístico IBM SPSS, lo que posibilitó la generación de gráficos de barras para la representación visual de las distribuciones, así como el desarrollo sistemático de los análisis descriptivo e inferencial correspondientes para contrastar las hipótesis planteadas.

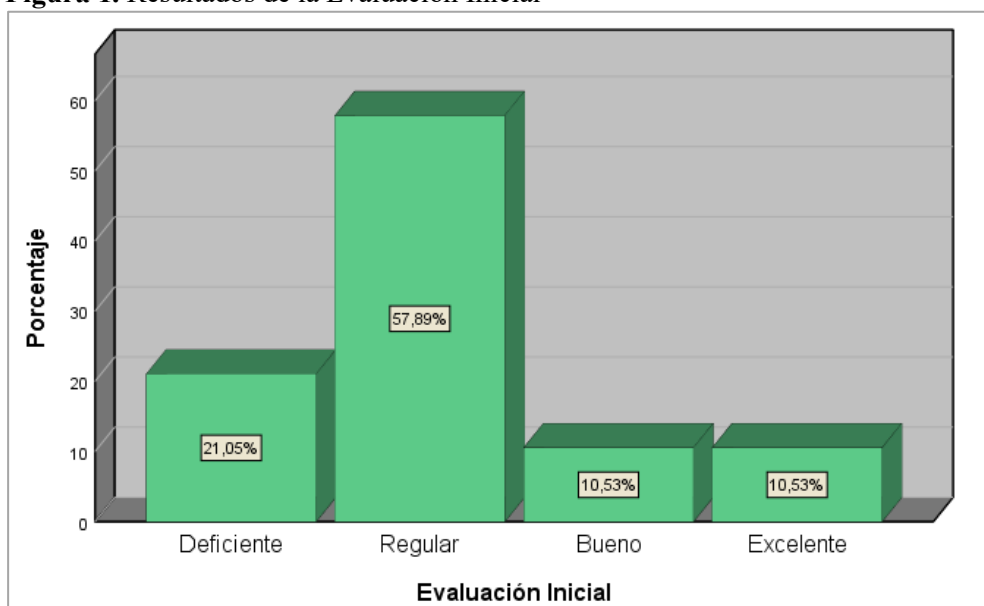
RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Este apartado expone los resultados del estudio, integrando el análisis descriptivo e inferencial para contrastar las hipótesis planteadas. Se describe inicialmente el punto de partida del grupo de estudio para luego determinar el efecto producido por el uso de GeoGebra en la transición de registros de representación. La secuencia didáctica comprendió una fase inicial con clases tradicionales de dos semanas y una intervención interactiva de una semana con GeoGebra, durante el cual se abordó la definición rigurosa de límite en funciones polinomiales (lineales, cuadráticas y cúbicas), racionales y de raíz cuadrada. Concluidas las intervenciones, se evaluó a los estudiantes mediante el instrumento sumativo, dando lugar a los datos comparativos que se analizan seguidamente.

Análisis de los resultados del pretest.

A partir de los datos presentados en la Figura 1 y considerando las escalas de valoración de la Tabla 1, se evidencia que cuatro estudiantes (21,05%) se ubicaron en el nivel deficiente (calificaciones inferiores a 4,00), mientras que 11 alumnos (57,89%) alcanzaron el nivel regular (notas entre 4,00 y 6,99). De este modo, el 78,94% de la muestra se concentró en los estratos de menor rendimiento. Por el contrario, el porcentaje restante (21,06%) correspondió a desempeños favorables: dos participantes (10,53%) obtuvieron una valoración de bueno (entre 7,00 y 8,99) y dos (10,53%) alcanzaron la categoría de excelente (entre 9,00 y 10,00). Esta distribución inicial corrobora que la mayor parte del grupo carecía del dominio necesario sobre la definición formal de límite y su correspondiente interpretación geométrica antes de la intervención.

Figura 1. Resultados de la Evaluación Inicial



Discusión de los resultados del Pretest

Los datos analizados evidencian que la mayoría del estudiantado experimenta dificultades significativas para asimilar la definición formal de límite. Tal como se planteó en la introducción, esta limitación responde a la propia naturaleza abstracta de este objeto matemático, el cual exige visualizar geoméricamente y conceptualizar comportamientos que no resultan intuitivos, como la aproximación infinitesimal hacia un valor determinado (Munyaruhengeri et al., 2024). Este obstáculo se acentúa con el uso de representaciones estáticas en la pizarra tradicional, situación que no solo restringe la

asimilación por parte de los alumnos, sino que también complejiza la labor pedagógica docente al momento de mediar estos contenidos (ALAM, 2020). Por consiguiente, se hace necesario el empleo de herramientas tecnológicas como GeoGebra para favorecer la comprensión conceptual y visual de dicho concepto.

Desde una perspectiva teórica, esta problemática encuentra sustento en la teoría de los registros de representación semiótica formulada por Duval (2006). De acuerdo con este marco conceptual, las deficiencias observadas se originan en las dificultades cognitivas del estudiantado para efectuar conversiones y tratamientos entre los registros verbal, algebraico y gráfico asociados a un mismo objeto matemático, en este caso, el límite de una función. La incapacidad para coordinar estas representaciones constituye un obstáculo sustancial que compromete la comprensión del cálculo y la posterior solvencia académica requerida en la formación profesional de la carrera de Ingeniería Civil.

Intervención con GeoGebra.

A partir del diagnóstico de las dificultades conceptuales identificadas en el pretest respecto a la definición formal de límite, se llevó a cabo una fase de instrucción mediada tecnológicamente (una semana adicional), orientada a consolidar dicho objeto de aprendizaje mediante el uso de GeoGebra como recurso semiótico dinámico. En esta etapa, los estudiantes construyeron de manera autónoma los applets interactivos diseñados para modelar el comportamiento infinitesimal y la aproximación en vecindades de una función, tal como se ilustra en las Figuras 2 y 3.

Figura 2. Diseño interactivo en GeoGebra para la conversión entre registros semióticos de la definición $\varepsilon - \delta$ de límite en una función polinómica.

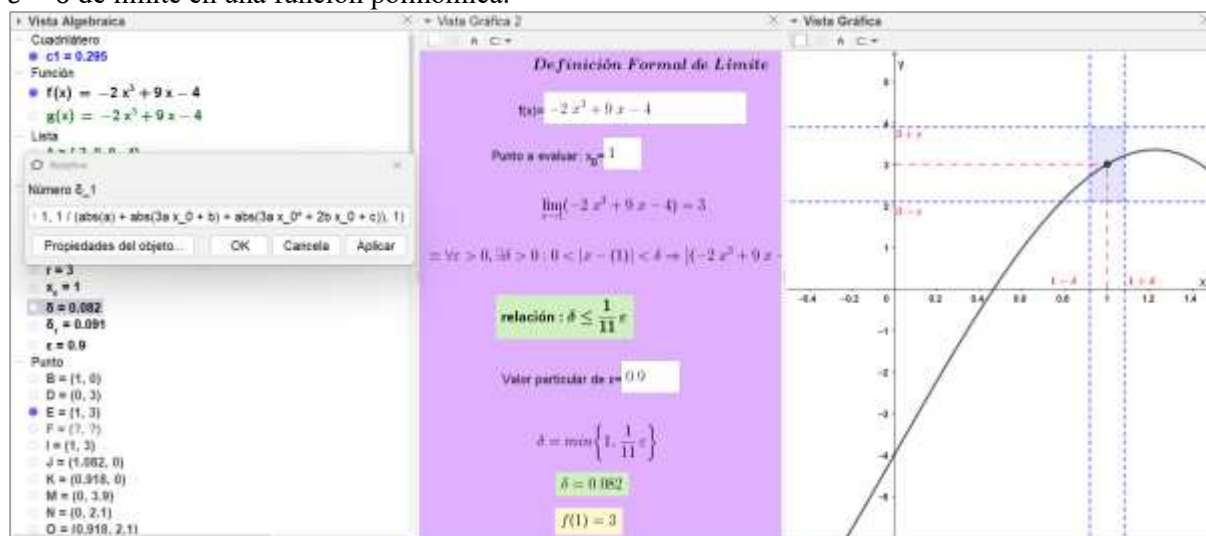
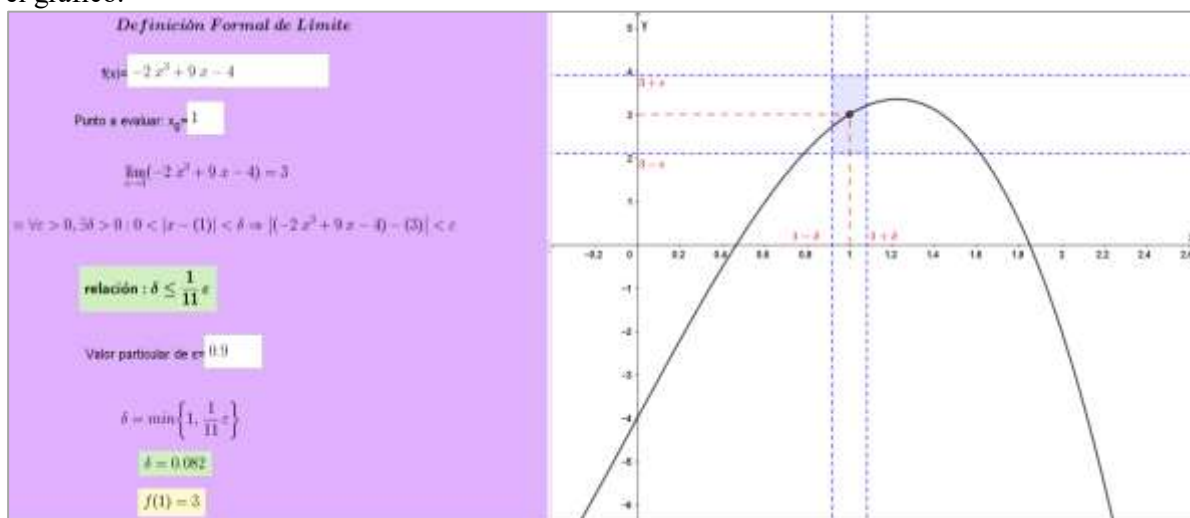


Figura 3. Límite de una función polinómica: en el lado izquierdo el registro algebraico y en el derecho el gráfico.



En dicha construcción dinámica para funciones de tercer grado, el alumnado dedujo la correspondencia analítica entre los parámetros ε y δ , restringiendo preliminarmente el valor del radio de proximidad a $\delta \leq 1$. La formulación partió de la expresión:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d$$

y mediante la definición formal de límite (Villena, 2020):

$$\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \right) \equiv \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \in D_f, \text{ si } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

llegaron a:

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{|a| + |3ax_0 + b| + |3ax_0^2 + 2bx_0 + c|}$$

es decir:

$$\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{|a| + |3ax_0 + b| + |3ax_0^2 + 2bx_0 + c|} \right\}$$

De este modo, se determinó una relación algebraica entre ε y δ . Asimismo, la estructura dinámica de este applet resulta aplicable al análisis de funciones polinomiales de segundo y primer grado, tal como se ilustra en las Figuras 4 y 5.

Figura 4. Definición formal de límite de una función cuadrática

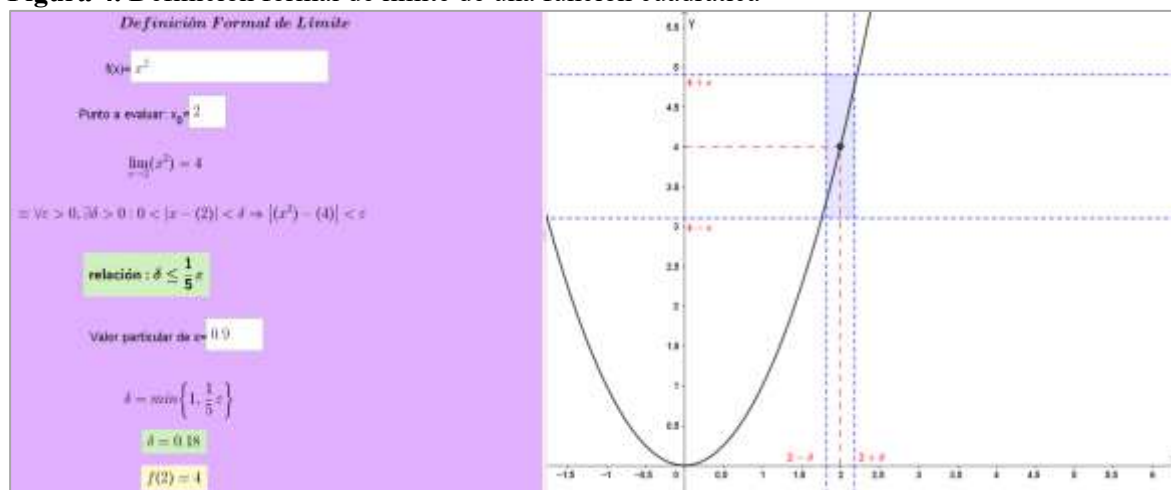
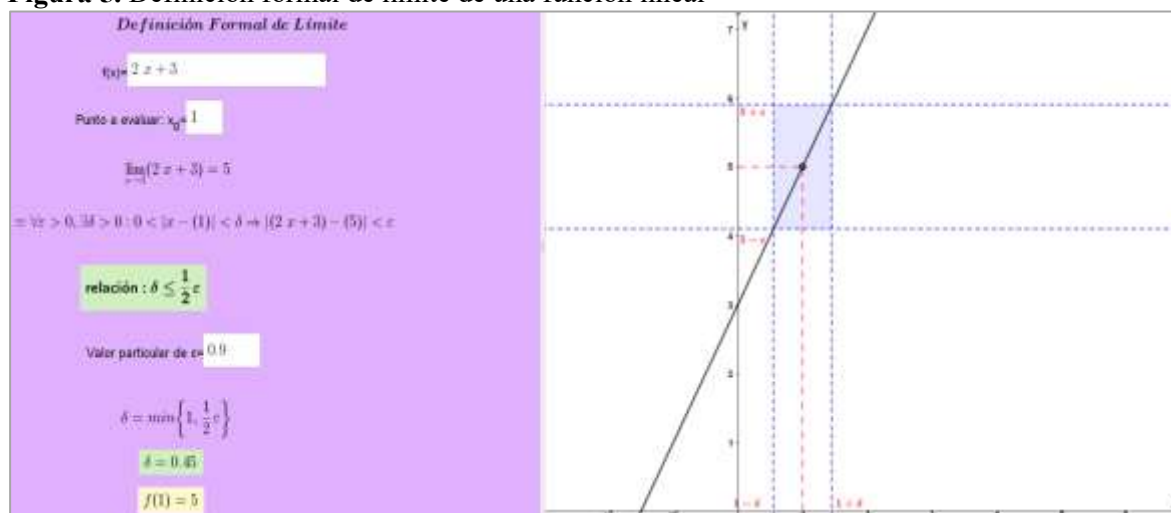
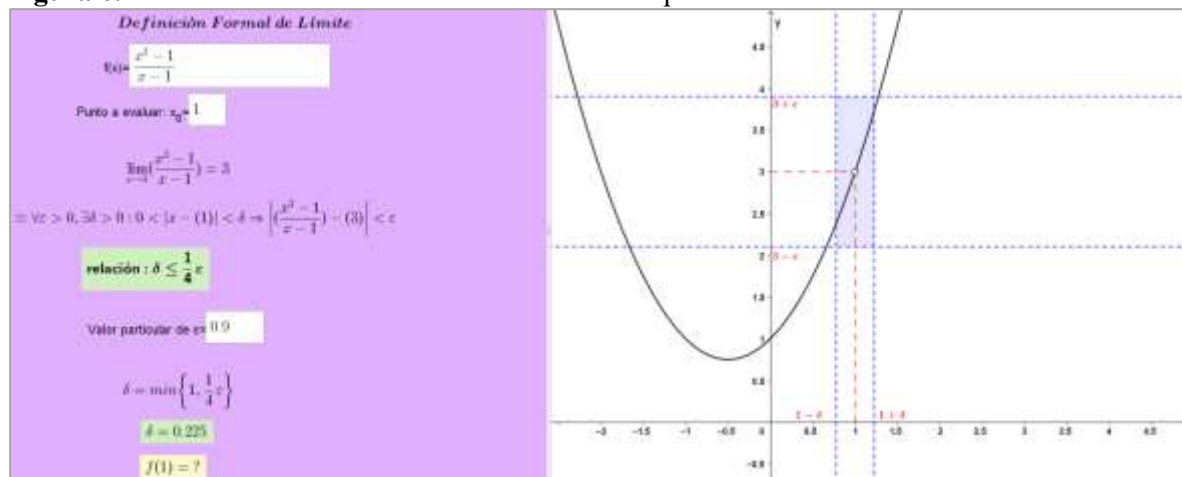


Figura 5. Definición formal de límite de una función lineal



Este applet también permite modelar límites de funciones racionales reducibles a formas polinomiales mediante factorización, tal como se observa en la Figura 6.

Figura 6. Límites de funciones racionales reducibles a polinómicas mediante factorización.



El applet desarrollado colaborativamente con los estudiantes se encuentra disponible en el siguiente enlace: <https://www.geogebra.org/classic/rqh25yqt>

Del mismo modo, la secuencia didáctica contempló el desarrollo de applets orientados al tratamiento formal de funciones racionales y de raíz cuadrada, ilustrados en las Figuras 7 y 8, respectivamente. Ambos modelos conservaron la dinámica de vinculación visual y algebraica implementada inicialmente en la Figura 2. El acceso a estas herramientas se proporciona a través de los siguientes enlaces:

<https://www.geogebra.org/classic/ezfvfuxu>

<https://www.geogebra.org/classic/sejmrutv>

Figura 7. Límite de la función racional $1/x$

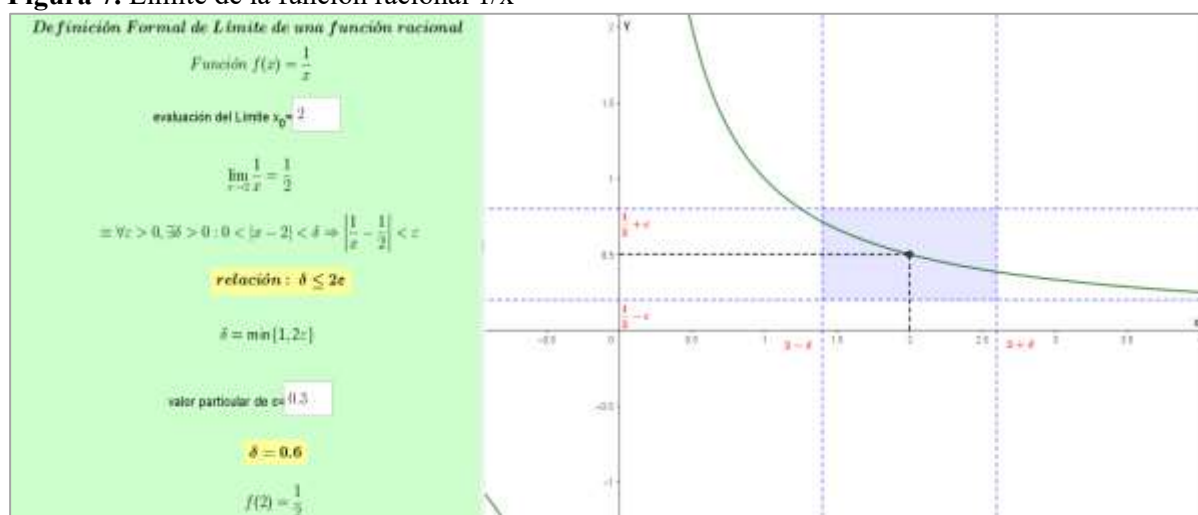
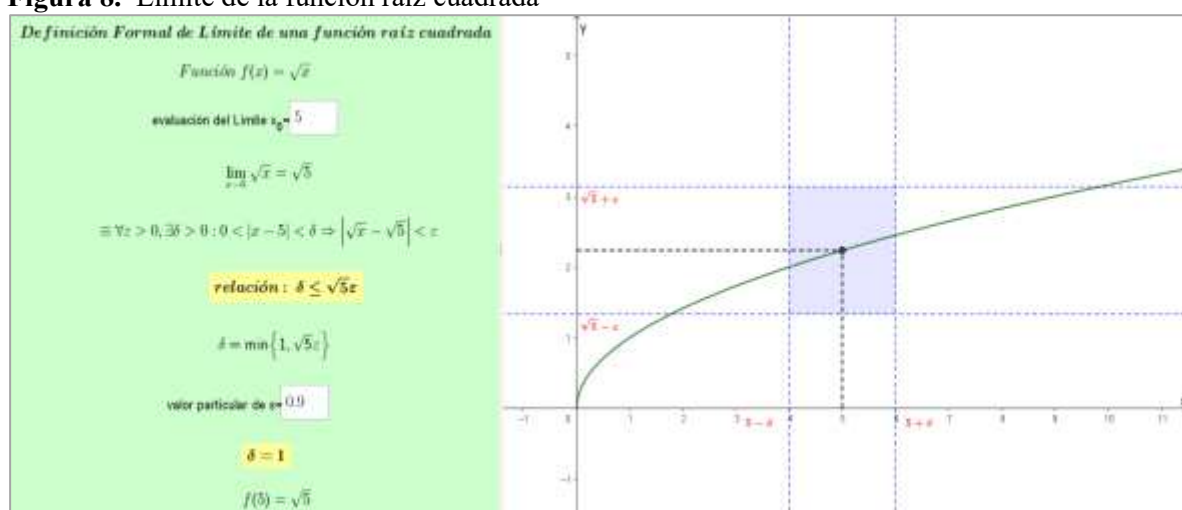


Figura 8. Límite de la función raíz cuadrada



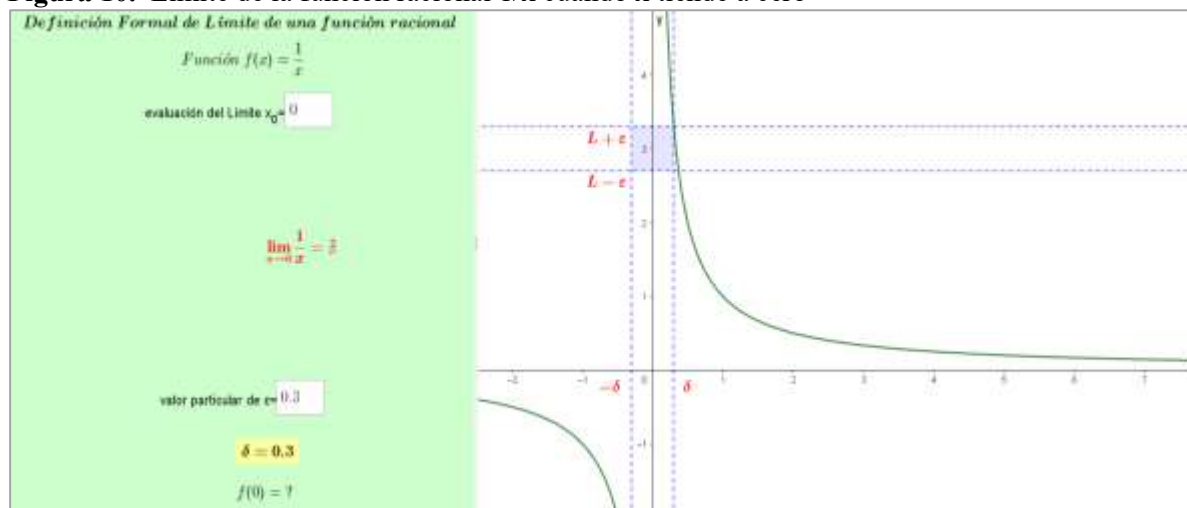
Tras la construcción de los applets, los estudiantes asignaron valores arbitrarios al parámetro épsilon (ϵ) para observar en tiempo real la variación correspondiente en delta (δ). Esta interacción favoreció una

comprensión geométrica más sólida del objeto matemático manipulado. Asimismo, el entorno dinámico permitió interpretar visualmente las condiciones de no existencia de un límite, tales como la aproximación hacia valores fuera del dominio real en la función $f(x) = \sqrt{x}$ (Figura 9), o el comportamiento divergente de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando x tiende a cero (Figura 10).

Figura 9. Límite de la función raíz cuadrada cuando x tiende a un número negativo.



Figura 10. Límite de la función racional $1/x$ cuando x tiende a cero



Análisis de los resultados del postest.

Finalizada la intervención didáctica con GeoGebra, se aplicó el postest al grupo de estudio con el propósito de determinar el impacto del software en la comprensión conceptual y geométrica de la definición formal de límite. Los datos representados en la Figura 11 evidencian una transformación favorable en el rendimiento académico de los participantes respecto al diagnóstico inicial.

Al observar la distribución de las calificaciones según las escalas de valoración establecidas, se constató que solo un estudiante (5,26%) permaneció en el nivel deficiente, mientras que tres participantes (15,79%) se situaron en el nivel regular. En contraste, la mayoría del grupo alcanzó desempeños satisfactorios: dos estudiantes (10,53%) se ubicaron en la categoría de bueno y 13 participantes (68,42%) alcanzaron el nivel excelente. Esta distribución confirma un desplazamiento positivo hacia los rangos superiores de aprovechamiento, reduciendo notablemente las frecuencias en los niveles bajos y concentrando al 78,95% de la muestra en niveles destacados (bueno y excelente), tal como se ilustra de forma comparativa en la Figura 12.

Figura 11. Resultados de la evaluación final

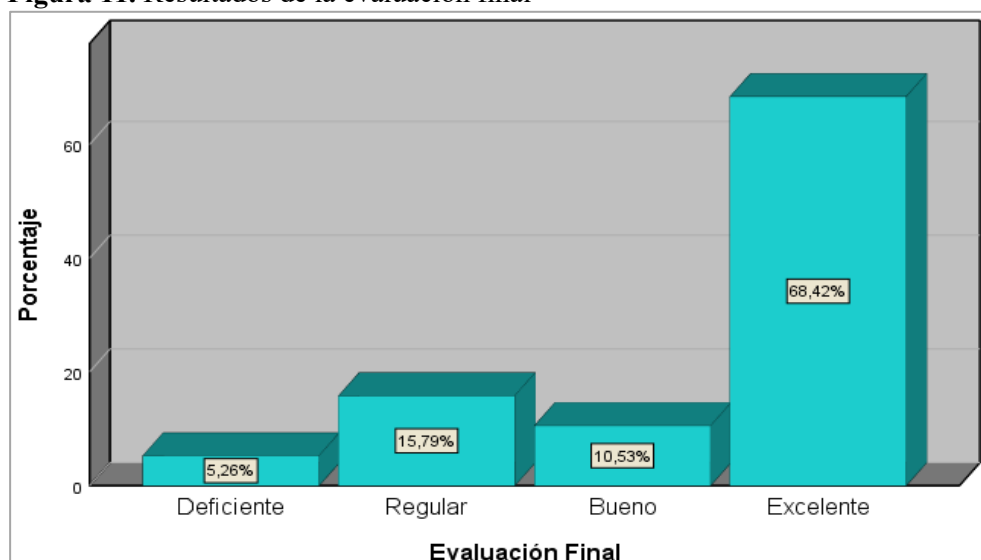
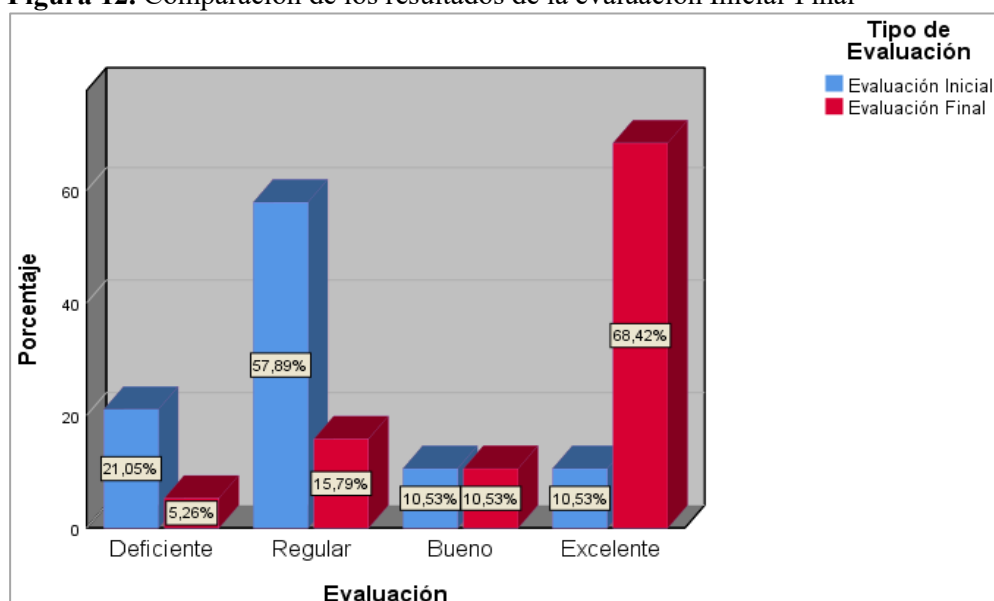


Figura 12. Comparación de los resultados de la evaluación Inicial-Final



Análisis Inferencial de los Resultados del Pretest y Postest.

Con el propósito de contrastar la hipótesis de investigación y determinar si el uso de GeoGebra produjo una mejora estadísticamente significativa en la comprensión de la definición formal de límite, se procedió a realizar el análisis inferencial de los resultados. Como paso previo, resultó indispensable verificar el supuesto de normalidad en las calificaciones del pretest y postest, a fin de seleccionar la prueba de contraste más adecuada (paramétrica o no paramétrica).

Dado que el estudio se llevó a cabo con una muestra conformada por 19 participantes ($n < 50$), se empleó la prueba de Shapiro-Wilk, por ser el estadístico más robusto y apropiado para grupos de esta magnitud (Flores Tapia y Flores Cevallos, 2021). Para esta evaluación de normalidad, se establecieron las siguientes hipótesis estadísticas:

H_0 : Los datos siguen una distribución normal ($p > 0,05$).

H_1 : Los datos no siguen una distribución normal ($p < 0,05$).

El procesamiento de los datos en el software IBM SPSS generó los estadísticos que se presentan en la Tabla 2. A partir de estos valores, se evaluó el cumplimiento del supuesto de normalidad para definir la pertinencia de la prueba de contraste para muestras relacionadas.

Tabla 2. Pruebas de normalidad

	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
Evaluación Inicial	,173	19	,138	,935	19	,218
Evaluación Final	,321	19	,000	,716	19	,000

a. Corrección de significación de Lilliefors

Al evaluar los resultados de la prueba de Shapiro-Wilk reportados en la Tabla 2, se observó que los puntajes del pretest presentaron un comportamiento compatible con la distribución normal ($W = 0,935$; $p = 0,218$). Sin embargo, las calificaciones del postest no cumplieron con dicho supuesto al mostrar una asimetría estadísticamente significativa ($W = 0,716$; $p < 0,05$). Al no verificarse la normalidad en ambas mediciones, se optó por la prueba no paramétrica de los rangos con signo de Wilcoxon para muestras relacionadas, con el fin de contrastar la hipótesis de investigación (Tablas 3 y 4).



Tabla 3. Prueba de rangos con signo de Wilcoxon

Rangos					
			N	Rango promedio	Suma rangos
Evaluación Final	-	Rangos negativos	2 ^a	5,00	10,00
Evaluación Inicial		Rangos positivos	15 ^b	9,53	143,00
		Empates	2 ^c		
		Total	19		

a. Evaluación Final < Evaluación Inicial

b. Evaluación Final > Evaluación Inicial

c. Evaluación Final = Evaluación Inicial

Tabla 4. Estadísticos de prueba^a**Evaluación Final - Evaluación Inicial**

Z	-3,152^b
Sig. asintótica(bilateral)	,002

a. Prueba de rangos con signo de Wilcoxon

b. Se basa en rangos negativos.

Al examinar la distribución de los rangos reportada en la Tabla 3, se constata que 15 de los 19 participantes incrementaron sus calificaciones tras la intervención (rangos positivos), mientras que dos obtuvieron una puntuación menor (rangos negativos) y dos conservaron su desempeño inicial (empates). Por su parte, la prueba de rangos con signo de Wilcoxon (Tabla 4) evidenció una diferencia estadísticamente significativa entre ambas mediciones ($Z = -3,152$; $p = 0,002$). Dado que el valor de significancia asintótica es menor al umbral establecido ($p < 0,05$), se rechaza la hipótesis nula (H_0) y se acepta la hipótesis de investigación (H_1), confirmando que el empleo didáctico de GeoGebra favoreció de forma significativa la comprensión conceptual y geométrica de la definición formal de límite.

Discusión de los resultados del Postest

Los hallazgos derivados de la intervención confirman una mejora estadísticamente significativa en el rendimiento académico de los estudiantes tras la mediación didáctica con GeoGebra. Desde el enfoque de los registros de representación semiótica propuesto por Duval (2006), estos resultados se explican por la capacidad del software para articular simultáneamente los registros gráfico, algebraico y verbal. Esta interactividad permite al alumnado efectuar conversiones y coordinaciones entre registros de



manera ágil, intuitiva y natural, reduciendo la carga cognitiva y favoreciendo una comprensión profunda de la definición rigurosa de límite (Flores Perez et al., 2025).

Esta evidencia es consistente con investigaciones previas sobre el impacto de la tecnología en la educación matemática. En particular, Aliu et al. (2025) demostraron que la enseñanza asistida por GeoGebra potencia de forma sustancial la comprensión conceptual y procedimental, la habilidad para resolver problemas y el nivel de participación del alumnado frente a las metodologías expositivas convencionales. No obstante, al igual que advierten dichos autores, la efectividad y sostenibilidad de estas propuestas dependen de atender desafíos estructurales como el acceso equitativo a la infraestructura digital, la capacitación docente continua y las condiciones para escalar estas prácticas en el aula universitaria.

En consonancia con estos hallazgos, Mollakuqe y Mollakuqe (2025) reportaron que el uso de GeoGebra incrementa de manera notable la motivación y el involucramiento estudiantil frente a metodologías tradicionales, registrando un 82% de participación activa y un 78% de entusiasmo hacia el aprendizaje matemático. Las valoraciones cualitativas de su estudio subrayaron el valor pedagógico de las visualizaciones interactivas para afianzar conceptos abstractos, aun cuando se identificaron retos iniciales durante la curva de adaptación técnica al software. En tal sentido, los autores concluyen que este tipo de entornos dinámicos favorece tanto la comprensión conceptual como la actitud del alumnado, si bien sugieren profundizar en la evaluación de sus efectos a largo plazo y en diversos contextos disciplinares.

Finalmente, los hallazgos de Nguyen et al. (2026) , al examinar la integración de GeoGebra bajo un enfoque de educación matemática realista en el cálculo, revelaron que el grupo intervenido alcanzó una mejora estadísticamente significativa en la comprensión conceptual de las derivadas frente al grupo de control, así como una superior capacidad de transferencia en la resolución de problemas aplicados.

A partir de estas evidencias teóricas y empíricas, se corrobora que la incorporación de GeoGebra supera el rol de un simple recurso visual; se consolida como una estrategia didáctica estructurada que potencia la mediación cognitiva y favorece de manera efectiva el rendimiento académico en la comprensión geométrica y analítica de la definición formal de límite.



CONCLUSIONES

La evidencia empírica recabada en esta investigación fundamenta una postura concluyente: la asimilación de la definición formal (ε - δ) de límite, históricamente confinada a una memorización algorítmica y estéril en la pizarra tradicional, experimenta un salto cualitativo sustancial cuando se media a través de entornos de geometría dinámica. Desde la perspectiva epistemológica de Duval, el valor pedagógico de GeoGebra no reside únicamente en su potencial ilustrativo, sino en su capacidad de operar como una herramienta cognitiva que sincroniza simultáneamente los tratamientos algebraicos y las conversiones visuales en tiempo real. Al dotar de dinamismo interactivo a los entornos y vecindades, el software desmitifica la naturaleza abstracta del objeto matemático, permitiendo que el estudiante comprenda el radio δ como una respuesta funcional y geométrica frente a la exigencia de proximidad ε .

En el ámbito formativo de la Ingeniería Civil, este hallazgo adquiere una relevancia estratégica. Superar la fractura inicial entre el registro analítico y el gráfico durante el primer semestre no solo corrige las deficiencias arrastradas desde el bachillerato, sino que consolida la base conceptual indispensable para abordar con solvencia contenidos curriculares avanzados de alta demanda analítica, tales como el cálculo multivariable, ecuaciones diferenciales, física y asignaturas afines. Por consiguiente, se sostiene que la integración deliberada de las Tecnologías del Aprendizaje y el Conocimiento (TAC) debe dejar de ser una práctica docente accesoria o aislada para constituirse en un componente metodológico nuclear del diseño curricular universitario.

No obstante, los alcances de este estudio delimitan tareas pendientes y nuevas interrogantes para la comunidad investigadora. Al haberse implementado en una muestra intacta delimitada temporalmente a dos semanas de intervención y a otra de refuerzo, queda por dilucidar en qué medida estas ganancias conceptuales perduran a mediano y largo plazo en la memoria operativa del alumnado. Asimismo, se plantea como desafío abierto examinar si esta mediación semiótica dinámica conserva la misma efectividad didáctica en grupos de mayor escala y heterogeneidad académica, o si requiere estrategias de andamiaje diferenciadas. Se extiende la invitación a futuros investigadores a contrastar estos hallazgos mediante estudios longitudinales y con grupos de control aleatorizados, así como a explorar el diseño de applets tridimensionales aplicados a límites en funciones de varias variables.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Acosta, S. F. (2023). Los enfoques de investigación en las Ciencias Sociales. *Revista Latinoamericana Ogmios*, 3(8), 82–95. <https://doi.org/10.53595/rlo.v3.i8.084>
- ALAM, A. (2020). Challenges and Possibilities in Teaching and Learning of Calculus : A Case Study of India. *Journal for the Education of Gifted Young Scientists*, 8(1), 407–433. <https://doi.org/10.17478/jegys.660201>
- Aliu, E. R., Jusufi Zenku, T., Iseni, E., & Rexhepi, S. (2025). The advantage of using GeoGebra in the understanding of vectors and comparison with the classical method. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 20(2), em0824. <https://doi.org/10.29333/iejme/16007>
- Bekene Bedada, T., & Machaba, M. F. (2022). The Effect of GeoGebra on Students' Abilities to Study Calculus. *Education Research International*, 2022, 1–14. <https://doi.org/10.1155/2022/4400024>
- Corona, L., & Fonseca, M. (2022). Las hipótesis en el proyecto de investigación: ¿cuándo sí, cuándo no? *Medisur*, 21(1), 269. <https://medisur.sld.cu/index.php/medisur/article/view/5475>
- Coronel, C. (2023). Los objetivos de la investigación. *Archivo Médico Camagüey*, 27, e9591. <https://revistaamc.sld.cu/index.php/amc/article/view/9591/4654>
- Dana-Picard, T., & Kovács, Z. (2021). Networking of technologies: a dialog between CAS and DGS. *The Electronic Journal of Mathematics and Technology (EJMT)*, 15(1), 43–59.
- Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 103–131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Flores Perez, A. D., Luna Romero, R. L., Romero Sánchez, J. E., & Ayala Chauvin, M. A. (2025). Aplicación de GeoGebra como recurso semiótico en la comprensión del Movimiento Vertical de Cuerpos. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, 9(6), 1842–1856. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v9i6.21271
- Flores Tapia, C. E., & Flores Cevallos, K. L. (2021). Pruebas para comprobar la normalidad de datos en procesos productivos: Anderson-Darling, Ryan-Joiner, Shapiro-Wilk y Kolmog'orov-Smirnov. *Societas*, 23(2), 83–106. <https://revistas.up.ac.pa/index.php/societas/article/view/2302>



- Gavilánez Luna, F. (2021). Diseños y análisis estadísticos para experimentos agrícolas. Ediciones Díaz de Santos.
- Hernández Culcay, C. S. (2025). Aplicación de GeoGebra para la comprensión geométrica del cálculo de límites y su influencia en el rendimiento académico de los estudiantes de Segundo año BGU pertenecientes al colegio Sagrados Corazones 2024-2025 [Universidad Técnica Particular de Loja]. <https://dspace.utpl.edu.ec/handle/29.500.19856/74991>
- Hernández, O. (2021). Aproximación a los distintos tipos de muestreo no probabilístico que existen. *Revista Cubana de Medicina General Integral*, 37(3).
http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0864-21252021000300002&lng=es&tlng=es
- Hohenwarter, M., & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra, the case of Geogebra. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27(3), 126–131.
- Lizana Chauca, D., & Antezana Iparraguirre, R. P. (2021). Representación semiótica en el aprendizaje de conceptos básicos de la estructura algebraica de grupo. *Horizonte de La Ciencia*, 11(21), 177–188. <https://doi.org/10.26490/uncp.horizonteciencia.2021.21.904>
- Mollakuqe, V., & Mollakuqe, E. (2025). A matrix-based analysis of pedagogical efficacy compared to traditional instructional approaches integrating GeoGebra in mathematics education. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 20(2), em0821.
<https://doi.org/10.29333/iejme/15936>
- Munyaruhengeri, J. P. A., Umugiraneza, O., Ndagijimana, J. B., & Hakizimana, T. (2024). Students' misconceptions and difficulties with learning limits and the continuity of functions at selected Rwandan secondary schools. *International Journal of Education and Practice*, 12(2), 467–482.
<https://doi.org/10.18488/61.v12i2.3719>
- Nguyen, D. T., Tran, L. V. H., Nguyen, T. M., Nguyen, A. T., & Nguyen, Q. P. (2026). The effectiveness of applying realistic mathematics education approach with the support of GeoGebra software (RME-SBG) in teaching calculus for high school students: A case of teaching the concept of derivatives. *Journal of Mathematics and Science Teacher*, 6(2), em105.
<https://doi.org/10.29333/mathsciteacher/18133>



Villena, M. (2020). Libro Negro (Primera Edición).

Vizcaíno, P. I., Cedeño, R. J., & Maldonado, I. A. (2023). Metodología de la investigación científica: guía práctica. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, 7(4), 9723–9762.

https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v7i4.7658

YILMAZ ASLAN, B., DOĞAN, Y., Özmusul, B., & Batdı, V. (2026). GeoGebra in Mathematics Education: Bridging Theory and Practice for Sustainable Digital Learning. *Sage Open*, 16(2).

<https://doi.org/10.1177/21582440261453411>

