



DOI: https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v6i6.3840

Solución analítica de la ecuación de Laplace aplicada a un campo de temperaturas en dos dimensiones usando superposición

Omar Christian Benítez Centeno¹

omar.bc@zacatepec.tecnm.mx

<https://orcid.org/0000-0002-5756-1912>

Erik López García¹

erik.lg@zacatepec.tecnm.mx

<https://orcid.org/0000-0003-2667-6474>

Minerva Guadalupe Vargas Vega¹

minerva.vv@zacatepec.tecnm.mx

<https://orcid.org/0000-0003-3900-6293>

Rosember Ovando Castelar¹

rosember.oc@zacatepec.tecnm.mx

<https://orcid.org/0000-0003-1491-7437>

Enrique de Jesús Moreno Carpintero¹

enrique.mc@zacatepec.tecnm.mx

<https://orcid.org/0000-0002-5472-1503>

¹Tecnológico Nacional de México / IT de Zacatepec

Av. Tecnológico No. 27, Col. Centro, Zacatepec Morelos, C.P. 62780, México

RESUMEN

Dentro del contexto de la creciente demanda de energía a nivel global, los procesos de generación e intercambios energéticos juegan un papel determinante y contienen implícitamente la transferencia de energía térmica. Entre los mecanismos de la transferencia de calor, particularmente cuando la energía térmica se difunde a través de un cuerpo sólido la conducción es predominante. En este trabajo se presenta la solución analítica de la ecuación general de conducción de calor, mediante la aplicación del método de solución de ecuaciones diferenciales parciales de la separación de variables para el caso de una placa cuadrada sujeta a condiciones de frontera de tipo Dirichlet para estado estacionario. Los resultados se comparan con un simulador de modelos térmicos, se observa buena concordancia con los resultados del presente trabajo.

Palabras clave: campo de temperaturas; ecuación diferencial parcial; separación de variables.

Correspondencia: erik.lg@zacatepec.tecnm.mx

Artículo recibido 17 octubre 2022 Aceptado para publicación: 17 noviembre 2022

Conflictos de Interés: Ninguna que declarar

Todo el contenido de **Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar**, publicados en este sitio están disponibles bajo

Licencia [Creative Commons](#) 

Cómo citar: Benítez Centeno, O. C., López García, E., Vargas Vega, M. G., Ovando Castelar, R., & Moreno Carpintero, E. de J. (2022). Solución analítica de la ecuación de Laplace aplicada a un campo de temperaturas en dos dimensiones usando superposición. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, 6(6), 5796-5809. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v6i6.3840

Analytical solution of laplace's equation applied to a temperature field in two dimensions using superposition

ABSTRACT

At the context of the growing demand for energy at a global level, the generation processes and energy exchanges have a determining role and significantly contain the transfer of thermal energy. Among the mechanisms of heat transfer, particularly when thermal energy is diffused through a solid body, conduction is predominant. This paper presents the analytical solution of the general heat conduction equation, through the application of the partial differential equations solution method of the separation of variables for the case of a square plate subject to Dirichlet-type boundary conditions for state stationary. The results are compared with a thermal model simulator, showing good agreement with the results of this work.

Keywords: *temperature field; partial differential equation; separation of variables*

INTRODUCCIÓN

El calor es aquella energía que se transfiere de una región más caliente de un cuerpo a una más fría. En los sólidos, la transferencia de calor tiene lugar debido a que las partículas subatómicas del cuerpo interactúan entre sí, siendo que las partículas más energéticas transportan su energía a las adyacentes con menor energía por medio de vibraciones en las moléculas que lo componen y debido a la formación de un gradiente de temperatura, aparecerá un fenómeno conocido como flujo de calor, éste no puede ser medido directamente, sin embargo, el parámetro físico que lo evidencia es la temperatura, la cual es cuantificable. Al conocer la distribución de temperatura $T(\underline{X}, t)$ (donde la temperatura es función de dos variables: el espacio en cualquier sistema coordenado por donde se transfiere el calor \underline{X} y la variable temporal t). El flujo de calor por conducción en un cuerpo también es función de la configuración geométrica de éste (sección transversal), su espesor, el material del cual está hecho y la diferencia de temperaturas en sus fronteras. Para el caso de los líquidos y gases el flujo de calor será en la medida de las colisiones y la difusión de las moléculas durante su movimiento errático. A continuación, se enlistan definiciones de parámetros termo físicos que están relacionados con la expresión matemática de la ecuación general de la transferencia de calor por conducción.

La conducción de calor se domina en sólidos y fluidos en reposo, este modelo de intercambio de energía térmica ocurre debido a la existencia de un gradiente de temperatura en el cuerpo, es decir, éste último se encuentra sometido a dos o más temperaturas distintas. El físico matemático francés Joseph Fourier propuso la ley básica con base a fundamentos teóricos y empíricos de calor que brinda la relación entre el flujo de calor y el gradiente de temperatura para materiales cuya composición sea homogénea e isotrópica (es decir, que la conductividad térmica no cambie en ninguna dirección del material), en la ecuación (1) se expresa esta ley [(Bird, 2006) y Welty (2008)]:

$$q(\underline{X}, t) = -k \nabla T(\underline{X}, t) \quad [1]$$

Donde el vector de flujo de calor (q), representa el calor por unidad de tiempo y unidad de área de la superficie isotérmica en la dirección del decaimiento de la temperatura $[W/m^2]$, debido a lo anterior, el signo negativo se ha agregado por convención para mantener al flujo de calor como una variable positiva en dicha dirección, k es la

conductividad térmica del material la cual es una variable positiva y posee unidades de razón de energía por unidades de longitud por unidades de diferencia de temperatura. El gradiente de temperatura ∇T , es un campo vectorial, donde los vectores son normales a la superficie y ésta tiene forma distinta según se trabaje en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

Desprendido de un balance diferencial de energía para tres dimensiones, donde un flujo de calor actúe perpendicular a una sección transversal del cuerpo de acuerdo a una dirección y fluya a través del mismo, y haciendo uso de la ley de Fourier para conducción, bajo la suposición de isotropía, también dentro del balance de energía para transferencia de calor se toma en cuenta la posibilidad de una generación interna de calor \dot{q} (pudiendo ser provocado por corrientes eléctricas que atraviesan el medio, corrientes parásitas, fenómenos químicos internos en el material, entre otros) y un almacenamiento de energía térmico, ésta última debido a la capacidad calorífica de los materiales, lo que permite determinar el campo de temperaturas y así mismo el cálculo de la tasa de transferencia de calor que ocurrió en las condiciones de frontera establecidas, se obtiene la ecuación de Fourier-Biot (donde $\alpha = k / \rho c_p$):

$$\nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad [2]$$

La ecuación de transferencia de calor está sujeta a condiciones de frontera, es decir, existe un comienzo del fenómeno de transporte y que varía a lo largo del tiempo y/o espacio hasta una restricción o condición de frontera final, por la cual existe un intercambio de energía y la masa. El presente trabajo trata sobre la solución de la temática antes planteada para el estado estacionario y sin generación interna de calor por unidad de volumen por la vía analítica por el método de separación de variables haciendo uso de la superposición [Incropera F.P. y Dewit D.P. (1999), Holman J.P. (1998), Kreith et al.(2011) y Cengel Y.(2010)]. Así la ecuación [2] se reduce a la ecuación de Laplace [3]:

$$\nabla^2 T = 0 \quad [3]$$

A continuación se presenta la solución a la ecuación de Laplace para la determinación de la distribución de temperaturas en dos dimensiones (2D) en coordenadas rectangulares, la literatura contiene propuestas de diversos métodos analíticos, algunos de ellos son: El

método del problema de transferencia de calor por conducción inversa (IHCP), la función de Green y el Método de separación de variables [Ozisik M.N.(1993) , Fernandes A. P. et al. (2015), Jodar (1990), Alianov (1974), Lesnic et al. (1996),], también se presentan alternativas experimentales [Guang XuYu (2014)].

METODOLOGÍA

El método de separación de variables o método del producto es un método de solución para las ecuaciones diferenciales parciales lineales. Escribiendo la ecuación [3], en coordenadas rectangulares para dos dimensiones, se expresa como:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad [4]$$

Para poder resolver la ecuación [4], se utiliza el método de separación de variables [Kreyszig (2003), Raiville (1999), Spiegel (1983), Cain y Meyer (2013), Polyanin y Zhurov (2020), Wanxie y Xiangxiang (1993), Shokhal y Verma (2021), y Zill y Wrigth (2011)], proponiendo una solución tal que

$$T(x, y) = X(x)Y(y) \quad [5]$$

El producto de dos funciones, una función que sólo depende de x y otra que solo depende y, este método es el más común para la solución de ecuaciones diferenciales parciales, el método de separación de variables, también llamado el método del producto. Al ser una solución, debe satisfacer la ecuación diferencial, de modo que la sustituir [5] en [4] se obtiene:

$$\frac{\partial^2 (X(x)Y(y))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (X(x)Y(y))}{\partial y^2} = 0 \quad [6]$$

Que también puede escribirse:

$$Y(y)X''(x) + X(x)Y''(y) = 0 \quad [7]$$

Que al separar los términos que corresponden a cada variable se obtiene:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \quad [8]$$

Se puede apreciar que un lado de la igualdad dependiente de la misma variable, y el otro lado de la igualdad independiente de esa variable y al ser x y y variables independientes por lo que no dependen entre sí, la ecuación [8] es verdadera si y solo si cada lado de la ecuación es igual a la misma constante que se llamará λ^2 , ahora se dice que la ecuación

es separable. Se tomará el caso del lado izquierdo de la igualdad, al ser dependiente de x y el lado derecho ser independiente de x . Llamaremos ahora la constante para el lado derecho siendo $Y''/Y = \lambda^2$, por lo tanto:

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2 \quad [9]$$

O bien:

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad [10]$$

Y para el caso del lado derecho de la ecuación [8], se hace

$$Y'' - \lambda^2 Y = 0 \quad [11]$$

Al resolver estas dos ecuaciones, [10] y [11], la constante λ^2 puede obtener tres valores tales que; $\lambda^2 = 0$, $\lambda^2 < 0$, $\lambda^2 > 0$, ahora se revisará cada una de estas condiciones para λ^2 . Para el caso $\lambda^2 = 0$, llamaremos a este el caso 1. La solución de las ecuaciones [10] y [11] será:

$$X(x) = A + xB \quad [12]$$

$$Y(y) = C + yD \quad [13]$$

Para el caso $\lambda^2 < 0$, llamemos a este, el caso 2. La solución de las ecuaciones [10] y [11] será:

$$X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} \quad [14]$$

$$Y(y) = C \cos \lambda y + D \sin \lambda y \quad [15]$$

Para el caso $\lambda^2 > 0$, llamemos a este, el caso 3. La solución de las ecuaciones [10] y [11] será:

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x \quad [16]$$

$$Y(y) = Ce^{\lambda y} + De^{-\lambda y} \quad [17]$$

Por lo tanto la solución para $T(x, y)$ será:

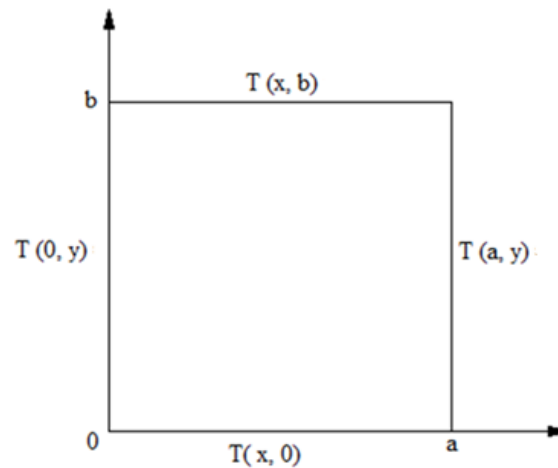
$$\text{Caso 1, } \lambda^2 = 0: \quad T(x, y) = (A + xB)(C + yD) \quad [18]$$

$$\text{Caso 2, } \lambda^2 < 0: \quad T(x, y) = (Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x})(C \cos \lambda y + D \sin \lambda y) \quad [19]$$

$$\text{Caso 3, } \lambda^2 > 0: \quad T(x, y) = (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x)(Ce^{\lambda y} + De^{-\lambda y}) \quad [20]$$

Considerando el siguiente modelo conceptual (figura 1), donde se representa una placa cuadrada constituida de un metal (cuyas propiedades se asumen isotrópicas):

Figura 1. Placa plana que considera constitución de material isotrópico.



Las condiciones de frontera se representan:

$$T(x, b) = T_A \quad [21]$$

$$T(x, 0) = T_C \quad [22]$$

$$T(a, y) = T_B \quad [23]$$

$$T(0, y) = T_D \quad [24]$$

Primero se resolverá la ecuación de Laplace tomando sólo una temperatura sobre las fronteras de la placa, parte superior ecuación $T(x, b) = T_A$, y las demás fronteras estarán aisladas $T(x, 0) = 0$, $T(a, y) = 0$ y $T(0, y) = 0$. Si se toma la solución para $T(x, y)$ del caso 1, la ecuación [18]. Y al sustituir el valor en la frontera $T(x, 0) = 0$ se tiene:

$$0 = (A + xB)(C) \quad [25]$$

Y es posible encontrar un valor para $C = 0$, al sustituir el valor de C en la ecuación [18], esta se reduce a:

$$T(x, y) = (yD)(A + xB) \quad [26]$$

Utilizando el valor de la frontera $T(0, y) = 0$, en la ahora modificada ecuación [26] se tiene:

$$0 = (A)(yD) \quad [27]$$

Y rápidamente se puede notar que $A = 0$, al sustituir el valor de A en la ecuación, esta se reduce a:

$$T(x, y) = (xB)(yD) \quad [28]$$

Si sustituimos el valor de la frontera $T(a, y) = 0$ en [27], se tiene:

$$0 = (aB)(yD) \quad [29]$$

Al llegar hasta este punto se puede apreciar que la solución particular comienza a ser trivial, por lo que no es conveniente utilizar la condición de $\lambda^2 = 0$, para estas consideraciones de frontera. De hecho, la consideración de $\lambda^2 = 0$ como solución llegará a ser soluciones triviales en este problema de la placa plana. Seguiremos con el caso de solución general el caso número 2. Si sustituimos el valor en la frontera $T(x, 0) = 0$, se obtendrá:

$$0 = (Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x})(C) \quad [30]$$

Y de inmediato se encuentra un valor para C , $C = 0$ y sustituyendo el valor en la ecuación [30], se obtiene:

$$T(x, y) = (Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x})(D \sin \lambda y) \quad [31]$$

También en esta ecuación se puede utilizar propiedades de $\sinh x$ y $\cosh x$ para facilitar la obtención de la solución particular, quedando:

$$T(x, y) = (A \cosh \lambda x + B \sinh \lambda x)(D \sin \lambda y) \quad [32]$$

Utilizando el valor en la frontera $T(0, y) = 0$ en la ecuación [32], se tiene:

$$0 = (A)(D \sin \lambda y) \quad [33]$$

Se notará que la solución es una solución trivial. Ya que, si se despeja D de la ecuación, su valor será cero, y la sustituir ese valor toda la solución también será cero. Por el otro lado, si despejamos A también tendrá valor de cero, pero si sustituimos este valor en [32], resulta:

$$T(x, y) = (B \sinh \lambda x)(D \sin \lambda y) \quad [34]$$

Y al sustituir el valor en la frontera $T(a, y) = 0$ en [34], se tiene:

$$0 = (B \sinh \lambda a)(D \sin \lambda y) \quad [35]$$

Y al despejar cualquier constante se observa que $B = 0$ o $D = 0$ y al sustituir cualquier valor se llega a una solución trivial. Por lo que quedará como última solución el caso número 3.

Al sustituir el valor de la frontera $T(0, y) = 0$:

$$0 = (A)(Ce^{\lambda y} + De^{-\lambda y}) \quad [36]$$

Y se nota que $A=0$, al sustituir el valor obtenido, la ecuación [36] se reduce a:

$$T(x, y) = (B \sin \lambda x)(Ce^{\lambda y} + De^{-\lambda y}) \quad [37]$$

Al utilizar el valor de la frontera $T(x, 0) = 0$, se tiene

$$0 = (B \sin \lambda x)(Ce^0 + De^0) \quad [38]$$

Se puede introducir la propiedad $2 \sinh \lambda y = e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}$, quedando la ecuación:

$$T(x, y) = 2BC(\sin \lambda x)(\sinh \lambda y) \quad [39]$$

Tomando ahora el valor de la frontera $T(a, y) = 0$, se tiene que:

$$0 = 2BC(\sin \lambda a)(\sinh \lambda y) \quad [40]$$

Despejando

$$0 = BC(\sin \lambda a) \quad [41]$$

Se debe considerar que $BC \neq 0$ para que la solución no se convierta en una solución trivial. Y la única manera que queda para que se cumpla la igualdad es que $\sin \lambda a = 0$, pero para que eso suceda $\lambda a = n\pi$ siendo $n = 1, 2, 3, \dots$, por lo tanto $\lambda_n = n\pi/a$. Teniendo en cuenta esto, la ecuación [39], se convierte en:

$$T_n = BC \left(\sin \frac{n\pi}{a} x \right) \left(\sinh \frac{n\pi}{a} y \right), \quad n \text{ entero} \quad [42]$$

Al tener numerosas soluciones para T , y utilizando condiciones de convergencia, puede decirse que la serie infinita

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \quad [43]$$

Que también puede expresarse como:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (BC \sin \lambda_n x \sinh \lambda_n y) \quad [44]$$

Es también solución de la ecuación diferencial. Y haciendo que el producto de B con C al ser constantes resultará otra constante, le llamaremos $BC = A_n$, entonces:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \lambda_n x \sinh \lambda_n y) \quad [45]$$

Al tomar por último el valor de frontera $T(x, b) = T_A$ y sustituirlo en [44], se tiene:

$$T_A = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \lambda_n x \sinh \lambda_n b) \quad [46]$$

Para evaluar a A_n se dispone de un método estándar. Éste implica escribir una expresión en serie infinita análoga en términos de funciones ortogonales. La forma de los coeficientes A_n de esta serie se determina multiplicando cada lado de la ecuación por $\sin \lambda_n x$ e integrando entre los límites de 0 y a :

$$\int_0^a (T_A \sin \lambda_n x) dx = \int_0^a \left(\sin \lambda_n x \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \lambda_n x \sinh \lambda_n b) \right) dx \quad [47]$$

$$\int_0^a (T_A \sin \lambda_n x) dx = \int_0^a (A_n \sin^2 \lambda_n x \sinh \lambda_n b) dx \quad [48]$$

Integrando y evaluando resulta:

$$A_n = \frac{4T_A (1 - \cos \lambda_n a)}{2\lambda_n a - \sin 2\lambda_n a} \frac{1}{\sinh \lambda_n b} \quad [49]$$

Al sustituir el valor obtenido para A_n en la ecuación [46], la solución particular para estos valores en la frontera resulta:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4T_A (1 - \cos \lambda_n a)}{(\sinh \lambda_n b)(2\lambda_n a - \sin 2\lambda_n a)} (\sin \lambda_n x)(\sinh \lambda_n y) \right] \quad [50]$$

La segunda solución a la ecuación de Laplace es tomando la temperatura sobre las fronteras de la placa, parte lateral derecha $T(a, y) = T_B$, y las demás fronteras estarán aisladas $T(x, b) = 0$, $T(x, 0) = 0$, $T(a, y) = 0$ y $T(0, y) = 0$. Siguiendo la misma metodología se llega a la solución:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2T_B (1 - \cos \lambda_n b)}{\lambda_n b (\sinh \lambda_n a)} (\sinh \lambda_n x)(\sin \lambda_n y) \right] \quad [51]$$

La tercera solución a la ecuación de Laplace es tomando la temperatura sobre las fronteras de la placa, parte inferior, y las demás fronteras estarán aisladas $T(x, 0) = T_C$, $T(x, b) = 0$, $T(a, y) = 0$, y $T(0, y) = 0$. Aplicando el procedimiento metodológico se obtiene la solución:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{4T_C (1 - \cos \lambda_n a)}{2\lambda_n a - \sin 2\lambda_n a} \right) (\sin \lambda_n x) \left(\cosh \lambda_n y - \frac{\cosh \lambda_n b}{\sinh \lambda_n b} \sinh \lambda_n y \right) \right] \quad [52]$$

La cuarta solución a la ecuación de Laplace es tomando la temperatura sobre las fronteras de la placa, parte izquierda $T(0, y) = T_D$, y las demás fronteras estarán aisladas:

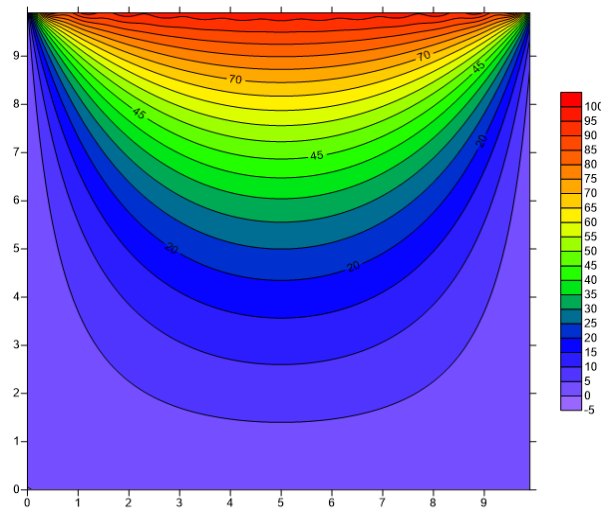
$T(x,0) = 0$, $T(x,b) = 0$ y $T(a,y) = 0$. Nuevamente al efectuar el proceso metodológico se obtiene la solución:

$$T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{4T_D(1-\cos \lambda_n b)}{2\lambda_n b - \sin 2\lambda_n b} \right) \left(\cosh \lambda_n x - \frac{\cosh \lambda_n a}{\sinh \lambda_n a} \sinh \lambda_n x \right) (\sin \lambda_n y) \right] \quad [53]$$

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

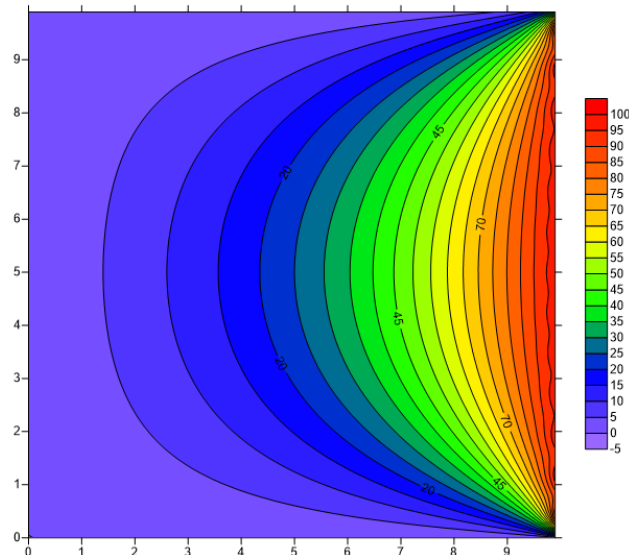
Tomando la ecuación [50], y utilizando el compilador Fortran de esta solución particular se presenta la siguiente isoterma, donde es fácilmente apreciable la frontera superior o Norte a una temperatura de $T_A = 100^\circ\text{C}$, tal y como se esperaba.

Figura 2. Isotermas con una temperatura en la frontera norte de 100°C , las fronteras Este, Oeste y Sur son a 0°C



De igual forma, tomando la ecuación [51], en la figura 3 se puede observar la isoterma correspondiente para el caso en que la frontera Este, se encuentre sujeta a $T_B = 100^\circ\text{C}$.

Figura 3. Isotermas con una temperatura en la frontera Este de 100°C , las fronteras Norte, Sur y Oeste son a 0°C .



De manera análoga se obtendrían los perfiles en dos dimensiones para las fronteras Sur y Oeste. Finalmente al someter a diferentes condiciones de frontera tipo Dirichlet simultáneamente las soluciones particulares para cada caso de valores en la frontera para la placa plana se tomará el teorema de superposición para determinar la solución particular de toda la placa plana con valores en la frontera:

$$T(x, b) = 100 \quad [53]$$

$$T(x, 0) = 40 \quad [54]$$

$$T(a, y) = 70 \quad [55]$$

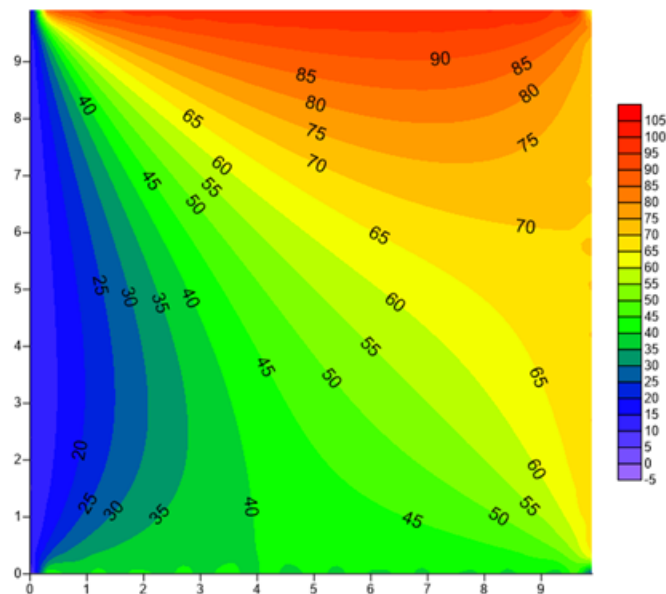
$$T(0, y) = 10 \quad [56]$$

Se hará una sumatoria de las cuatro soluciones particulares, $T(x, y) = \sum T$:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n (\sin \lambda_n x) (\sinh \lambda_n y) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n (\sinh \lambda_n x) (\sin \lambda_n y) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n (\sin \lambda_n x) \left(\cosh \lambda_n y - \frac{\cosh \lambda_n b}{\sinh \lambda_n b} \sinh \lambda_n y \right) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[D_n \left(\cosh \lambda_n x - \frac{\cosh \lambda_n a}{\sinh \lambda_n a} \sinh \lambda_n x \right) (\sin \lambda_n y) \right] \quad [57]$$

La superposición de los resultados para el método analítico de separación de variables arroja la siguiente distribución de temperaturas:

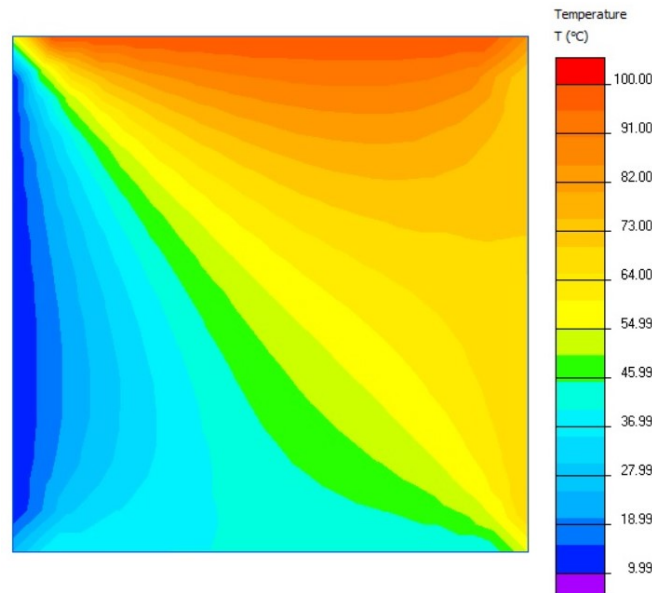
Figura 4. Isotermas con una temperatura en la frontera Norte de 100°C, frontera Este de 70°C, frontera Sur de 40°C y Oeste a 10°C.



Los resultados muestran una correlación coherente de la distribución interna de la temperatura que depende de las condiciones de frontera a que estuvieron sujetas. Para corroborar los resultados obtenidos se procedió a realizar una validación contra los

resultados de la distribución de temperaturas obtenido por un paquete de software de simulación para la transferencia de calor de licencia libre (Figura 5).

Figura 5. Isotermas resultado de la solución por paquete de software para la simulación de transferencia de calor (las dimensiones son en cm).



CONCLUSIONES

Como se puede constatar los resultados de la distribución de temperaturas 2D para estado estacionario, producto de la solución analítica por la aplicación del método de separación de variables, tiene alta correspondencia en contraste con la solución numérica y con un software para simular dicha distribución, muestran total concordancia. Los errores porcentuales absolutos son menores al 1% respecto de la solución analítica. Se comprobó la utilidad y eficacia del método de separación de variables.

LISTA DE REFERENCIAS

- Alifanov O.M. (1974), Solution of an inverse problem of heat conduction by iterations methods, J. Eng. Phys. Thermophys. 26 (4) 471–476.
- Bird R., (2006), Transport Phenomena, Limusa -Wiley, Cap 9, pp. 309.
- Cain G., Meyer G.H., (2013), Separation of Variables for Partial Differential Equations, Chapman and Hall/CRC
- Cengel Y.(2010), Transferencia de calor, Mc Graw Hill. Cap. 282-285.
- Fernandes A. P, Marcelo Braga dos Santos, Gilmar Guimarães. (2015), An analytical transfer function method to solve inverse heat conduction problems, Applied Mathematical Modelling 39 (2015) 6897–6914

- Guang Xu Yu, Jie Sun, Hua Sheng Wang, Pi Hua Wen, John W. Rose. (2014), Meshless inverse method to determine temperature and heat flux at boundaries for 2D steady-state heat conduction problems, *Experimental Thermal and Fluid Science* 52 (2014) 156–163.
- Holman J.P. (1998), *Transferencia de Calor*. Mc Graw Hill, Cap 3, pp. 51-54.
- Incropera F.P. y Dewit D.P. (1999), *Fundamentos de transferencia de calor*. Pearson, Cap 4, pp. 162-167.
- Jodar L., (1990), A separation of the variables method for solving coupled systems of second-order partial differential equations: exact, approximate solutions and error bounds. *Journal of computational and applied mathematics*, 31, 243-251.
- Kreith F., Manglik R. M., Bohn M.S. (2011), *Principles of heat transfer*. Cengage Learning, Chapter 2, pp. 106-111.
- Kreyszig Erwin. (2003), *Matemáticas avanzadas para ingeniería II*, Limusa Wiley.
- Lesnic D., Elliott L., Ingham D.B., (1996), Application of the boundary element method to inverse heat conduction problems, *Int.J.HeatMassTransfer*39(7). 1503–1517.
- Ozisik M.N. (1993), *Heat Conduction*, John Wiley, Chapter 1 and 2.
- Polyanin A.D., Zhurov A.I., (2020), Separation of variables in PDEs using nonlinear transformations: Applications to reaction-diffusion type equations, *Applied mathematics letters*, Elsevier, Vol 100.
- Rainville Earl. D. (1999), *Ecuaciones Diferenciales Elementales*, Trillas. 433-452.
- Spiegel Murray R. (1983), *Ecuaciones Diferenciales Aplicadas*, Prentice-Hall. 560-568.
- Shokhal S., Verma S. R., (2021), A Fourier wavelet series solution of partial differential equation through the separation of variables method, *Applied Mathematics and computation*, Vol. 338, Elsevier.
- Wanxie Z., Xiangxiang Z., (1993), Method of separation of variables and Hamiltonian system, *Numerical methods for partials differentials Equations*. Vol 9, pp. 63-75.
- Welty J., (2008), *Fundamentos de Transferencia de Momento, Calor y Masa*, Wiley, 5ta Edicion , Cap. 16, pp. 217-221.
- Zill D.G., Wright W.S. (2012), *Matemáticas avanzadas para ingeniería*, Mc Graw Hill, 523-526.