Ciencia Latina
Revista Multidisciplinar

DOI: https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v6i6.4266

Conexiones matemáticas y conceptualizaciones de la pendiente establecidas por futuros profesores colombianos de matemáticas

Camilo Andrés Rodríguez-Nieto
camiloarodriguez@uniatlantico.edu.co
https://orcid.org/0000-0001-9922-4079

Arturo Manuel Povea-Araque
apovea@mail.uniatlantico.edu.co
https://orcid.org/0000-0002-3457-7583

Hernando Andrés Cera-Charris
hacera@mail.uniatlantico.edu.co
https://orcid.org/0000-0001-5584-6941

Universidad del Atlántico
Barranquilla - Colombia

RESUMEN

Se exploraron las conexiones matemáticas entre conceptualizaciones de la pendiente establecidas por futuros profesores de matemáticas. Teóricamente el trabajo se fundamentó en la Teoría Ampliada de las Conexiones (TAC) y en las categorías de conceptualizaciones de la pendiente. La metodología fue cualitativa desarrollada en cuatro etapas: 1) se diseñó un cuestionario con tres tareas, 2) se seleccionaron los participantes, 3) se aplicó el cuestionario a través de la observación participante y, 4) se analizaron los datos para identificar las conexiones entre conceptualizaciones. Los principales resultados muestran la diversidad de conceptualizaciones de los futuros profesores, por ejemplo, como propiedad física, razón algebraica, razón geométrica, coeficiente paramétrico, indicador de comportamiento, situación del mundo real, entre otras, donde emergen conexiones de significado, representaciones diferentes, característica, metafórica, parte-todo, procedimental e implicación que, a su vez, son usadas en la resolución de problemas donde los futuros profesores hallaron la pendiente y la ecuación de la recta tangente a una curva. Se concluye que, este estudio puede ser un insumo para los profesores de bachillerato y universidad para abordar el tema de la pendiente desde las conexiones y contribuir a la comprensión del mismo concepto.

Palabras clave: Conceptualizaciones de la pendiente; Futuros profesores de matemáticas; Educación Matemática.

Correspondencia: camiloarodriguez@uniatlantico.edu.co
Artículo recibido:28 noviembre 2022. Aceptado para publicación: 28 diciembre 2022.
Conflictos de Interés: Ninguna que declarar

Como citar: Rodríguez-Nieto, C. A., Povea-Araque, A. M., & Cera-Charris, H. A. (2023). Conexiones matemáticas y conceptualizaciones de la pendiente establecidas por futuros profesores colombianos de matemáticas. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, *6*(6), 12582-12611. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v6i6.4266

Pre-service Colombian mathematics teachers' Mathematical connections and conceptualizations of slope

ABSTRACT

Mathematical connections between conceptualizations of slope established by pre-service mathematics teachers were explored. Theoretically, the work was based on the Extended Theory of Connections (ETC) and on the conceptualization categories of the slope. The methodology was qualitative developed in four stages: 1) a questionnaire with three tasks was designed, 2) the participants were selected, 3) the questionnaire was applied through participant observation and, 4) the data was analyzed to identify the connections between conceptualizations. The main results show the diversity of conceptualizations of the pre-service mathematics teachers, for example, such as physical property, algebraic reason, geometric reason, parametric coefficient, behavior indicator, real world situation, among others, where meaning connections emerge, different representations, feature, metaphorical, part-whole, procedural and implication which, in turn, are used in problems-solving where pre-service mathematics teachers found the slope and the equation of the tangent line to a curve. It is concluded that this study can be an input for high school and university teachers to address the issue of slope from the connections and contribute to the understanding of the same concept.

Keywords: Conceptualizations of slope; Pre-service mathematics teachers; Mathematics Education.

INTRODUCCIÓN

En los organismos curriculares y en la investigación en Educación Matemática se ha consolidado una línea de investigación relevante referida a las *conexiones matemáticas* debido a que, son indispensables para que una persona adquiera un tipo de comprensión sobre los conceptos matemáticos, de otras asignaturas (e.g., Física, Biología, Química), ingenierías, contaduría, administración de empresas, medicina, y situaciones de la vida real (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Rodríguez-Nieto et al., 2022a). De hecho, se afirma que las conexiones matemáticas están presentes en cada paso realizado en la resolución de problemas intramatemáticos o extramatemáticos (Kenedi et al., 2019).

Diversas investigaciones manifiestan las aportaciones de los estudios y proyectos enmarcados en las conexiones matemáticas, por ejemplo, Evitss (2004) investigó sobre las conexiones establecidas por futuros profesores de secundaria cuando resuelven problemas matemáticos de una reforma curricular, quienes usaron conexiones representacionales, estructurales, procedimental-conceptual, modelación, entre otras. En el caso de Businskas (2008) exploró las conexiones matemáticas de futuros profesores en el contexto de la ecuación y función cuadrática, destacándose el uso de conexiones procedimentales, parte-todo, orientada a la instrucción, implicación y modelado y con esto refinó su modelo que más adelante sería usado en distintas investigaciones en el campo de las conexiones (García-García y Dolores-Flores, 2019). Al respecto, Eli et al. (2011) y Eli et al. (2013) analizaron conexiones matemáticas de futuros profesores de matemáticas con base en el modelo propuesto por Evitss (2004) y encontraron que ellos mayoritariamente establecen conexiones de tipo procedimental y categórica y en menor frecuencia conexiones matemáticas derivativas o curriculares cuando se les aplicó la actividad de clasificación de tarjetas referida a varios términos, conceptos, definiciones y problemas matemáticos (volumen de un prisma rectangular, derivada de una función, ángulos, teorema de Pitágoras, entre otros).

En esta línea, se han realizado otras investigaciones cuyo objetivo está direccionado a la comprensión de un objeto matemático por medio de conexiones. Específicamente, Dolores-Flores y García-García (2017) profundizaron sobre las conexiones intramatemáticas y extramatemáticas en la resolución de problemas de Cálculo diferencial en el ámbito universitario. García-García y Dolores-Flores (2018) indagaron sobre las conexiones realizadas por estudiantes del preuniversitario según el estamento educativo mexicano acerca de la derivada y la integral. De igual manera, García-García y Dolores-Flores (2019) detallaron el estudio anterior con el propósito de proponer un marco de referencia ligado a las conexiones de tipo significado, representaciones diferentes, parte-todo, implicación, reversibilidad y característica. En este proyecto, los autores manifestaron que los estudiantes tienen preferencia por la expresión simbólica de una función para poder graficarla, de lo contrario experimentan limitaciones conceptuales y procedimentales. Luego, García-García y Dolores-Flores (2020) reportaron las conexiones de estudiantes al resolver problemas de aplicación sobre Cálculo.

Desde un óptica teórica-metodológica y práctica, Rodríguez-Nieto (2021) y Rodríguez-Nieto et al., (2022b) identificaron las conexiones matemáticas de un profesor de Cálculo cuando aborda la derivada, quien expresó lenguajes cotidianos y metafóricos que dieron lugar a la nueva vista de las conexiones metafóricas y la Teoría Ampliada de las Conexiones Matemáticas (TAC). Por su parte, Rodríguez-Nieto et al. (2022a) articularon la TAC con el Enfoque Ontosemiótico (EOS) para analizar las conexiones sobre la derivada considerando que una conexión puede ser entendida como la punta de un iceberg constituido por un conglomerado de prácticas, procesos, objetos y funciones semióticas que los relacionan. Además, ofrecieron una definición de comprensión matemáticas asociada a las conexiones y al uso competente de los objetos matemáticos en diferentes prácticas o contextos. Con base, en estas aportaciones teóricas, se desarrollaron otras investigaciones para explorar las conexiones entre las funciones exponencial y logarítmica enfatizando en la conexión central de reversibilidad (Campo-Meneses y García-García, 2020; Campo-Meneses et al., 2021).

Rodríguez-Nieto et al. (2021a) analizaron la comprensión de los estudiantes universitarios cuando relacionan las gráficas de la función y su derivada desde una visión gráfica. Estos estudios se caracterizan por influir de manera positiva en el ámbito universitario, pero no se había reflexionado sobre la calidad de las conexiones matemáticas, lo cual es una herramienta importante porque deja ver la capacidad de las personas entorno al tipo de argumento que soporta o valida la conexión. En este contexto, una conexión errada se considera de nivel 0 de calidad, una conexión bien establecida pero no argumentada hace referencia a un nivel 1 de calidad y una conexión bien establecida y argumentada se denomina un nivel 2 de calidad (Mhlolo, 2012; Rodríguez-Nieto et al., 2021b). Actualmente, han surgido otros estudios que valoran la práctica del profesor de matemáticas sobre las funciones (Hatisaru, 2022), de igual manera, De Gamboa et al. (2022) afirman que, en el trabajo sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (nos referimos al uso del modelo MTSK (Mathematics teacher's specialised knowledge)) existe la "necesidad de incluir las conexiones matemáticas como parte del dominio del conocimiento del contenido pedagógico, ya que el conocimiento de este dominio podría movilizarse durante el establecimiento de las conexiones matemáticas" (p. 1).

Es oportuno mencionar que, en esta investigación es de interés en concepto de pendiente y se reconoce que en la literatura existen estudios sobre las conexiones que establecen estudiantes del preuniversitario sobre este concepto (Dolores-Flores et al., 2019), pero considerado como la razón de cambio. Estos autores identificaron que los estudiantes asumen a la razón de cambio (pendiente) como un concepto desconectado de la velocidad, la aceleración y la rapidez. Asimismo, la mayoría de los estudiantes realizaron conexiones matemáticas procedimentales que involucran el uso de fórmulas y las conexiones matemáticas de características las usaron con menor frecuencia. Este estudio muestra la relevancia de las conexiones y de la pendiente, pero también sugiere seguir investigando porque estos conceptos se trabajan de manera aislada.

En relación con la pendiente, se visualiza que es un concepto relevante y necesario para la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato, en la universidad y en la vida cotidiana. Asimismo, la pendiente se sugiere trabajar desde diferentes significados, representaciones, interpretaciones, conceptualizaciones (Beyerley y Thompson, 2017; Dolores-Flores et al., 2019; Secretaría de Educación Pública [SEP], 2017; Stump, 1999; Teuscher y Reys, 2010) y en Estados Unidos de América se aborda desde el octavo grado de educación secundaria a manera de razón geométrica o razón de cambio (Stanton y

Moore-Russo, 2012) y también es fundamental para comprender las funciones, en especial, la función lineal donde en muchos casos se requiere de la razón de cambio para interpretar mejor la solución de problemas reales, no obstante, los estudiantes tienen dificultades para trabajar con la pendiente (Weber et al., 2015), por ejemplo, de manera gráfica porque confunden el valor de la pendiente tanto así que dibujan la línea recta con la dirección opuesta a la pendiente dada (Cho y Nagle, 2017; Deniz y Kabael, 2017). Otra de las dificultades se reconoció cuando los estudiantes universitarios proceden de manera mecanizada o memorística usando la subida sobre la carrera (rise over run), porque no la expresan en forma de fracción simplificada (Cho y Nagle, 2017). Ante esta situación, Dolores-Flores e Ibáñez-Dolores (2020) afirman que "las fuentes de tales dificultades sea la amplia variedad de formas en que se puede conceptualizar la pendiente" (p. 826) y que la mayoría de las personas (estudiantes y profesores) desconocen.

En los resultados de Rodríguez-Nieto et al. (2021c) se evidenció que los futuros profesores de matemáticas tienen dificultades para comprender la derivada porque al hallar la derivada de la función sostienen que esa es la ecuación de la recta tangente y no enfatizan en que la derivada está asociada a la pendiente. Esto permitió que un futuro profesor de matemáticas no hiciera conexiones entre representaciones diferentes y de significado. Por ende, surge la preocupación y a la vez motivación para trabajar sobre este concepto, de hecho, es crucial para comprender conceptos de Cálculo como la derivada, con la pendiente se pueden analizar los comportamientos de las funciones (Deniz y Kabael, 2017).

Particularmente en México se ha investigado detalladamente el concepto de la pendiente y sus conceptualizaciones entre las que se destacan la de Rivera-López et al. (2019) reportaron las conceptualizaciones de la pendiente usadas por estudiantes universitarios, pero concluyeron que ninguno de los estudiantes evocó la conceptualización trigonométrica en la resolución de las tareas. Estos autores infieren que existe una desconexión entre la conceptualización como cociente o razón algebraica y la trigonométrica, lo cual muestra que en su formación matemática han usado escasamente la aspectos variacionales y geométricos de este concepto. Además, reconocieron que los estudiantes cometen errores ligados al tratamiento de la función lineal, funciones crecientes y decrecientes, rectas paralelas y perpendiculares, que están asociadas al concepto de pendiente. Esta problemática también fue observada en Cho y Nagle (2017) acerca de los errores de los estudiantes en los procedimientos provocados por el uso inadecuado de expresiones algebraicas y operaciones aritméticas que afectan la comprensión del concepto de pendiente.

En esta línea, Salgado et al. (2020) quienes indagaron sobre las conceptualizaciones de la pendiente en el contenido que enseñan algunos profesores de matemáticas de Bachillerato, observando que usan con mayor frecuencia la de razón algebraica, trigonométrica y coeficiente paramétrico cuando explican, define, ejemplifican y proponen tareas. Enfocado en los materiales curriculares, Dolores-Flores et al. (2020) analizaron los libros de texto mexicanos de matemáticas y aspectos del plan de estudios e identificaron que en el noveno grado sugieren abordar la pendiente y en el décimo grado introducir las funciones lineales sin enfatizar en la pendiente y sus conceptualizaciones. Asimismo, afirmaron que se necesitan más estudios sobre la pendiente de manera internacional para tener evidencia de la comprensión de estudiantes y profesores sobre este concepto. Por su parte, Abreu-Blaya et al. (2020) reportaron un estado del arte sobre la pendiente donde tuvieron en cuenta las conceptualizaciones y su origen (Stump, 1999). Además, de las descripciones e interpretaciones teóricas realizadas, sugirieron algunas de las futuras investigaciones en este campo (ver Figura 1).

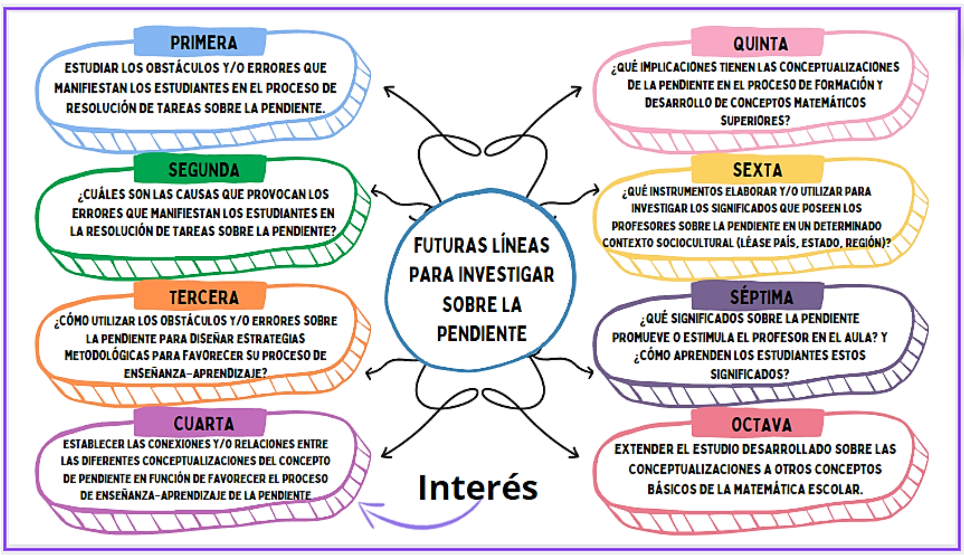


Figura 1. Futuras líneas de investigación propuestas por Abreu-Blaya et al. (2020).

Debido a las dificultades evidenciadas en la literatura consideramos relevante investigar sobre la *cuarta* futura línea de investigación (ver Figura 1), de hecho, con las conexiones se pueden abordar otras líneas como, por ejemplo, la séptima. No obstante, ¿de qué tipo de conexiones se hace referencia? Es un buen punto de partida para seguir indagando sobre esta importante temática. En el caso de los significados reconocimos el estudio de Sánchez-Santiesteban et al. (2021) donde abordaron los significados de la pendiente que profesan profesores en servicio, quienes concluyeron que, "estudiar los significados para la enseñanza de la pendiente que poseen los profesores, es importante ya que es un concepto básico para la formación de las nuevas generaciones y está presente en los currículos de matemática a nivel mundial" (p. 13). Aunado a lo anterior, es importante destacar que Dolores-Flores y Mosquera-García (2022) analizaron las conceptualizaciones de la pendiente en el currículo colombiano y encontraron que en la primaria prevalece la propiedad funcional y situación del mundo real, en secundaria las conceptualizaciones de coeficiente paramétrico e indicador de comportamiento y en el bachillerato la propiedad funcional, situación del mundo real y la concepción en cálculo. Este resultado los llevó a concluir que la enseñanza de la pendiente desde los planteamientos del currículum colombiano tiende a un desarrollo desde el pensamiento variacional.

En síntesis, valoramos la literatura revisada porque nos permitió identificar la importancia de las conexiones matemáticas como una vía para activar la comprensión de conceptos (Berry y Nyman, 2003; Rodríguez-Nieto et al., 2022a), las conceptualizaciones de la pendiente que son fundamentales para la enseñanza de las matemáticas desde perspectivas geométricas, algebraicas y variacionales (Beyerley y Thompson, 2017; Dolores-Flores et al., 2019; Stump, 1999; Teuscher y Reys, 2010) usadas en el bachillerato y en la universidad como requisito previo para abordar conceptos de Cálculo. A pesar de ser un concepto crucial, notamos que la mayoría de los estudiantes y algunos profesores tiene dificultades para establecer conexiones entre conceptualizaciones, relacionarlas con la vida cotidiana, estudian las funciones sin considerar la pendiente, usan mayoritariamente la conceptualización razón algebraica $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)$, confunden la expresión algebraica de la derivada global con la ecuación de la recta tangente, debido a que existe falta de uso y compresión del significado parcial de la derivada como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto (Rodríguez-Nieto et al., 2021). Por lo tanto, esta investigación tiene el propósito de *explorar las conexiones matemáticas entre conceptualizaciones de la pendiente establecidas por futuros profesores colombianos de matemáticas*.

2. MARCO TEÓRICO

En este apartado se describen las conexiones matemáticas de la TAC y las conceptualizaciones de la pendiente.

2.1. Teoría Ampliada de las conexiones matemáticas

A partir de un consenso en la literatura especializada en Educación Matemática, se les ha dado relevancia a las conexiones matemáticas porque son necesarias para la comprensión matemática. Además, las conexiones matemáticas se entienden como relaciones entre objetos matemáticos (representaciones, significados, proposiciones, procedimientos, entre otros) y se categorizan en extramatemáticas cuando se resuelven problemas de aplicación o no matemáticos donde se debe construir o seguir un modelo matemático e intramatemáticas que emergen de tareas enmarcadas dentro de las matemáticas evidenciándose relaciones entre conceptos, teoremas, significados, etc. (Dolores-Flores y García-García, 2017). A continuación, en la Figura 2 se muestran las conexiones.

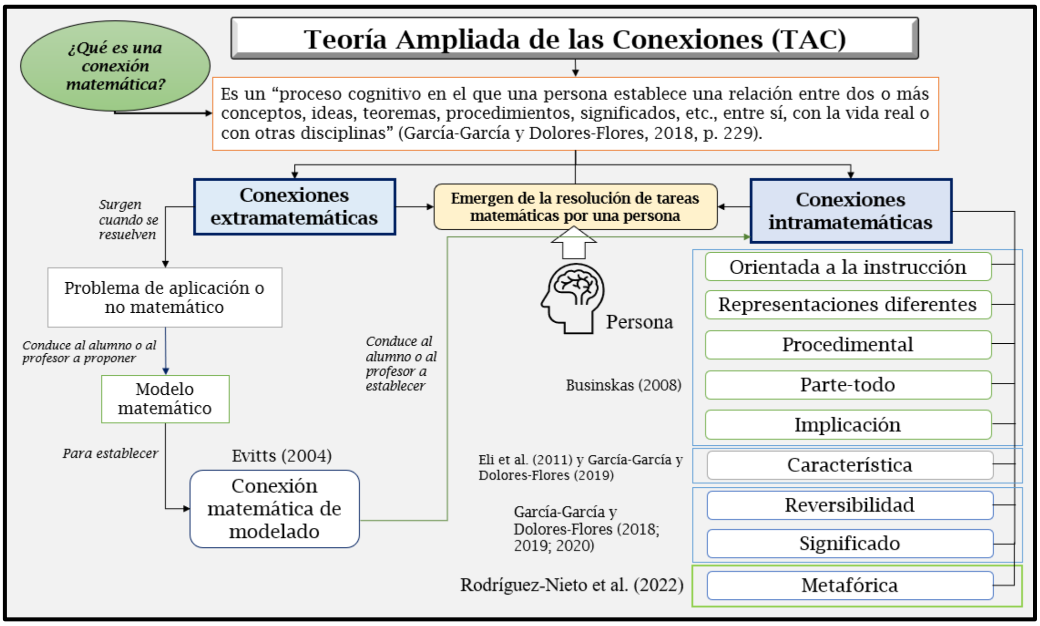


Figura 2. Categorías de conexiones matemáticas.

Profundizando en la información plasmada en la Figura 3, las conexiones matemáticas de modelado son relaciones entre las matemáticas y la vida real o la cotidianidad y se evidencian cuando el sujeto resuelve problemas no matemáticos o de aplicación donde tiene que plantear un modelo o expresión matemática (Evitts, 2004). Las conexiones orientadas a la instrucción son usadas por los docentes cuando consideran conocimientos previos o requisitos para abordar nuevos conocimientos en el aula de clases (Businskas, 2008). Básicamente, este tipo de conexiones se relacionan con el aprendizaje significativo de Ausubel. Las conexiones de representaciones diferentes (Businskas, 2008) se manifiestan de dos maneras: alternas cuando el objeto matemático se expresa en registros diferentes (gráfico-algebraico) y equivalente cuando el objeto matemático se expresa de varias maneras, pero en registros algebraicos (ver Figura 3).

Equivalentes: Algebraica-algebraica, $Q(x) = 9x^2 - 25$ es equivalente a $Q(x) = (3x+5)(3x-5)$.

Alternas: la representación gráfica de la función cuadrática $P(x) = 3x^2 + 5x - 6$ es una representación alterna de su expresión algebraica $P(x) = 3x^2 + 5x - 6$.

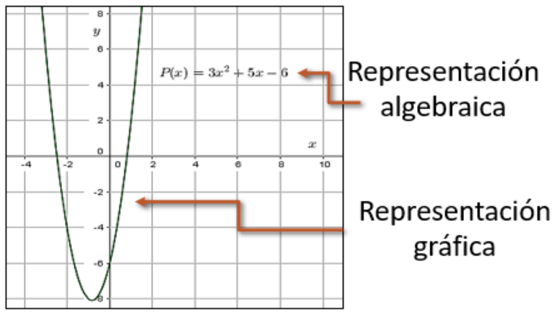


Figura 3. Conexiones de representaciones diferentes.

Las conexiones procedimentales se activan cuando un sujeto usa fórmulas o reglas institucionales para emprender procedimientos para resolver un problema matemático. Por ejemplo, usar la fórmula $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}$ para hallar la distancia d entre dos puntos dados $P_1(x_1,\ y_1)$ y $P_2(x_2,\ y_2)$. Las conexiones de tipo parte-todo se caracterizan por particularizar o generalizar un objeto matemático, por ejemplo, 1) la función particular $f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$ con dominio $\{x/x \neq \pm 2\}$ es un caso particular de la función racional general $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde P y Q son polinomios, cuyo domino está conformado por los valores de x tales que $Q(x) \neq 0.$ 2) la relación de inclusión está dad cuando un concepto matemático está contenido en otro. Por ejemplo, los números naturales están contenidos en los reales.

Las conexiones de tipo implicación se reconocen cuando una persona establece relaciones lógicas *(P→Q)* partiendo de un concepto *P* que conduce a otro concepto *Q.* Por ejemplo, si *f(x)* es creciente en un intervalo *I*, entonces *f'(x)* es positiva en *I* (Businskas, 2008). En esta línea, se presentan las conexiones de tipo características, las cuales se identifican cuando se manifiestan propiedades de los conceptos que los distinguen de otros conceptos (García-García y Dolores-Flores, 2019), por ejemplo, un triángulo tiene tres lados (característica 1) y tiene tres ángulos (característica 2). Las conexiones de tipo reversibilidad son activadas por acciones y/o procedimientos realizados por las personas por medio de relaciones bidireccionales partiendo de un concepto *P* para llegar a un concepto *Q* e invertir el proceso partiendo de *Q* para volver a *P*. Específicamente, estas conexiones se identifican en el trabajo con las operaciones inversas (adición y sustracción), funciones inversas como la exponencial y la logarítmica, la derivada y la antiderivada, etc.

Otro tipo de conexiones son las de significado, identificadas cuando el sujeto atribuye un sentido a un concepto matemático (expresión/contenido). También, se identifica cuando un sujeto da una definición que él o ella ha construido para estos conceptos (García-García y Dolores-Flores, 2020). Por ejemplo, la derivada es la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto. Por último, la conexión metafórica se refiere a la emisión de expresiones metafóricas que manifiestan la proyección de las propiedades, características, etc. un dominio conocido (experiencias cotidianas) para estructurar otro dominio menos conocido (abstracto). Por ejemplo, cuando el sujeto usa expresiones verbales como "*recorrer la gráfica sin levantar el lápiz del papel*" que implícitamente sugieren la metáfora conceptual "*la gráfica es un camino*" (Rodríguez-Nieto et al., 2022b).

2.2. Conceptualizaciones de la pendiente

Las conceptualizaciones de la pendiente emergieron en los resultados de los trabajos impulsados por Stump (1999, 2001) y Moore-Russo et al. (2011). Inicialmente, Stump (1999) reportó siete tipos de conceptualizaciones: razón algebraica, razón geométrica, propiedad funcional, propiedad física, trigonométrica, coeficiente paramétrico y conceptualización en Cálculo. Luego, Stump (2001) motivado por esta línea de investigación, agregó las conceptualizaciones de situación mundo real (clasificada en: situaciones físicas y situaciones funcionales). Finalmente, hasta la fecha Moore-Russo et al. (2011) propusieron ampliaron el modelo con tres conceptualizaciones más, tales como indicador de comportamiento, constante lineal y propiedad determinante (ver Tabla 1).

Tabla 1

Descripción de las conceptualizaciones de la pendiente.

Conceptualización	Descripción
Razón Algebraica (A)	Cambio en y entre cambio en x, razón con la expresión algebraica $\frac{y2-y1}{x2-x1}$ $o\frac{\Delta y}{\Delta x}$
Razón Geométrica (G)	La razón del desplazamiento vertical y desplazamiento horizontal en la gráfica de una recta. Subida sobre corrida en el gráfico de una recta.
Propiedad Funcional (F)	Razón de cambio constante entre dos variables encontradas en representaciones múltiples, incluyendo tablas y descripciones verbales (por ej. cuando x incrementa en 2, y incrementa en 3).
Situación Mundo-Real	Situación física (estática, por ej.: una rampa, escalera etc.) o situación funcional (dinámica, por ej.: distancia en función del tiempo, volumen en función del tiempo etc.)
Indicador de Comportamiento (B)	Número real con signo que indica crecimiento (+), decrecimiento (−), tendencia horizontal de la línea (0). Si no es cero, indica la intersección con el eje x.
Propiedad Física (P)	Descripción de una recta utilizando expresiones como grado, inclinación, tendencia, ladeo, declive, ángulo, etc.
Coeficiente Paramétrico (PC)	Coeficiente m (o su valor numérico) en $\boldsymbol{y = mx + b}$ ó $\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$.
Trigonométrica (T)	Propiedad relacionada con el ángulo de una recta que hace con una recta horizontal; tangente del ángulo de inclinación.
En Cálculo (C)	Medida relacionada con la derivada como la pendiente de la tangente a una curva, de una recta secante, o cómo razón de cambio instantánea para cualquier función (incluso una no lineal).
Propiedad Determinante (D)	Propiedad que determina si las rectas son paralelas o perpendiculares entre sí; además de determinar una recta si da un punto y su pendiente**.**
Constante Lineal (L)	Propiedad constante y única para las rectas; pendiente de la recta no es afectada por la traslación. Propiedad constante que garantiza la colinealidad

Nota. Adaptado de Nagle y Moore-Russo (2014)

3. METODOLOGÍA

La investigación es cualitativa descriptiva (Cohen et al., 2018) cuyo interés es analizar un fenómeno enmarcado en la Educación Matemática que involucra personas de estudio superiores. Se ha llevado a cabo en tres etapas descritas en la Figura 4.

Figura 4. Camino metodológico de la investigación.

3.1. Participantes

Los participantes de esta investigación fueron dieciocho estudiantes universitarios de noveno semestres, próximo a graduarse como licenciados en matemáticas en una Universidad pública del sur del departamento del Atlántico, Colombia, a quienes hemos denominado futuros profesores de matemáticas por sus características y logros alcanzados en el 85% de los créditos de la carrera. Además, ellos participaron de manera voluntaria porque en un primer momento se les comentó del proyecto de investigación y accedieron de forma amena y exponiendo sus ideas sobre el concepto de pendiente. Por último, se comente que estos estudiantes se encontraban desarrollando una electiva de Cálculo con el objetivo de mejorar o reforzar sus conocimientos sobre funciones, límites, derivadas e integrales.

3.2. Recolección de datos

Para la recolección de los datos se siguieron dos momentos: 1) se diseñó un cuestionario (ver Tabla 2) constituido por cuatro tareas relacionadas con el concepto de pendiente con el propósito de explorar sus conexiones y conceptualizaciones que han trabajado o aprendido en sus experiencias como estudiantes o docentes. 2) se aplicó el cuestionario durante noventa minutos en un aula de la Universidad (ver Figura 5).

Tabla 2
Cuestionario y descripción de las tareas.

Tarea	Descripción
1	¿Qué es la pendiente? Explica tu respuesta.
2	Proponga un ejemplo, representación o aplicación de la pendiente.
3	Halle la pendiente de la recta que pasa por los puntos: $P_1(-2,0)$ y $P_2(3,1)$ y dibuje su gráfica.
4	Halle la pendiente de la recta que pasa por los puntos: $P_1(-1,2)$ y $P_2(2,2)$ y dibuje su gráfica.
5	Halle la pendiente de la recta que pasa por los puntos: $P_1(0,4)$ y $P_2(1,-1)$ y dibuje su gráfica.
6	Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva $g(x) = x^2 + x$ en un punto de abscisa $x = 1$.

Nota. Elaboración de los autores con base en Orts et al. (2018).

Además, este cuestionario se aplicó a los futuros profesores de matemáticas y algunos de ellos participaron en la pizarra explicando detalladamente el procedimiento realizado para resolver cada una de las tareas (ver Figura 5).

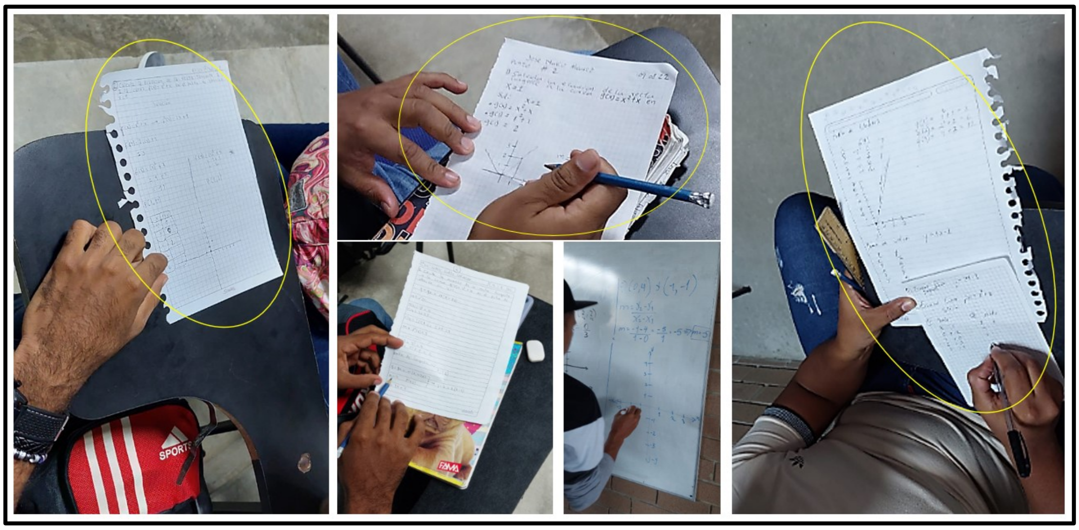


Figura 5. Participantes resolviendo las tareas.

3.3. Análisis de datos

Los fueron analizados a través del lente teórico presentado en la sección 2., considerando las conceptualizaciones de la pendiente y las conexiones matemáticas (TAC). En este contexto, en los resultados se mostrarán las conexiones que realizan los futuros profesores de matemáticas y simultáneamente se mencionará el tipo de conceptualización o viceversa. Además, las conceptualizaciones identificadas transitaron por una triangulación de expertos (Aguilar y Barroso, 2015) donde los investigadores habían determinado códigos asociados a la descripción de cada conceptualización identificada en definiciones, representaciones, experiencias cotidianas y ejemplos propuestos por los futuros profesores sobre la pendiente. De esta manera, en la Tabla 3 se presentan unas etiquetas y códigos para cada conceptualización desarrollada en la sesión de resultados. De hecho, las conceptualizaciones más utilizadas fueron: propiedad física, situación-mundo real y razón algebraica. Seguidas, las menos comunes: razón geométrica, indicador de comportamiento, coeficiente paramétrico, conceptualización de cálculo.

Es oportuno mencionar que, los futuros profesores no enfatizaron en la propiedad determinante, propiedad trigonométrica, propiedad funcional y constante lineal.

Tabla 3. etiquetas y formas de identificar las conceptualizaciones en los datos.

CONCEPTUALIZACIÓN	DESCRIPCIÓN DE LOS CODIGOS
Razón Algebraica (A)	A_1: Utiliza la fórmula $m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$ para calcular la pendiente a partir de las coordenadas de dos puntos en el plano.
Razón Geométrica (G)	G_1: La razón del desplazamiento vertical y desplazamiento horizontal en la gráfica de una recta.
Situación Mundo-Real (R) (RP -Física y RF - Funcional)	R_{F1}: La pendiente es la razón de cambio constante, por ejemplo: distancia vs tiempo, la pendiente representa la velocidad. R_{P1}: Se asocia la pendiente con el medio circundante, por ejemplo, escaleras, rampas, etc.
Indicador de Comportamiento (B)	B_1: Si la pendiente es positiva la recta es creciente y si es negativa entonces es decreciente. B_2: La pendiente es cero si la recta es constante
Propiedad Física (P)	P_1: cuando asume el valor de la pendiente como el ángulo de inclinación. P_2: La pendiente es descrita empleando términos como: declive, inclinación o grado de inclinación.
Coeficiente Paramétrico (PC)	PC_1: El valor numérico de la pendiente está dado por el número que acompaña la x en la ecuación $\boldsymbol{y = mx + b}$. PC_2: El valor numérico de la pendiente es el valor de m en $\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$.
Cálculo (C)	C_1: relacionada con la derivada como la pendiente de la tangente a una curva

Con base en el análisis de las tareas propuestas identificaron siete conceptualizaciones de la pendiente (ver Tabla 4). Cabe destacar que, hubo mayor dominio en el enfoque visual, ya que los futuros profesores relacionaron la pendiente con objetos de la vida cotidiana.

Tabla 4

Conceptualizaciones de la pendiente usadas por los futuros profesores.

Futuros profesores	Conceptualizaciones												No hizo conceptualización
	A	G	F	R		B	P	PC	T	C	D	L	
				R_P	R_F								
E1	A_1			R_{P1}			P_2						
E2	A_1			R_{P1}			P_2						
E3	A_1			R_{P1}		B_1	P_2						
E4				R_{P1}			P_2						
E5	A_1			R_{P1}		B_1							
E6	A_1					B_2	P_1	PC_1, PC_2		C_1			
E7	A_1			R_{P1}									
E8	A_1	G_1					P_1						
E9	A_1			R_{P1}		B_1	P_2	PC_2		C_1			
E10				R_{P1}			P_2	PC_2		C_1			
E11				R_{P1}			P_2	PC_2		C_1			
E12				R_{P1}			P_2	PC_2		C_1			
E13				R_{P1}			P_2						
E14	A_1	G_1		R_{P1}			P_2						
E15				R_{P1}			P_2						
E16	A_1						P_2						
E17	A_1							PC_2		C_1			
E18													x

En la Tabla 4, E18 no estableció conceptualizaciones de la pendiente, ya que al resolver las tareas 1 y 2 presentó una confusión al comparar la pendiente con términos cotidianos y la reconoció como la inclinación, enfatizando en una preferencia o gusto. Además, en el proceso de resolución de las tareas 3, 4 ,5 y 6 no hubo un registro o producción por parte del futuro profesor.

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A continuación, es este apartado se explican detalladamente las conceptualizaciones y las conexiones matemáticas en relación con la pendiente.

4.1. Conceptualización de Situación Mundo-Real

En las evidencias de trece participantes hubo alto énfasis en esta conceptualización, dado que, en cada registro escrito los futuros profesores contextualizaron con ejemplos al comparar la pendiente con el medio circundante, se materializó cuando vincularon la pendiente con objetos físicos como rampas, escaleras, calles, montañas, terrenos y techos.

Los participantes **E1, E4 y E15** relacionan la pendiente con las estructuras que hay en los parques como los toboganes, deslizaderos, rampas y montaña rusa, **E2, E10 y E13** contextualizan la pendiente como la subida o bajada de montañas, **E3, E14** relacionan la pendiente con la forma del cielo de las casas, **E5, E9 y E11** relacionan la pendiente con la construcción en ingeniería como puentes (puente de Calamar, Bolívar) y edificios, **E7** desde otro punto de vista ejemplifica la pendiente como la forma que debe tener un piso para que exista un drenaje para llegar a un desagüe, **E12** propone un ejemplo de pendiente como la relación del riego de un terreno y la gravedad (ver Figura 6).

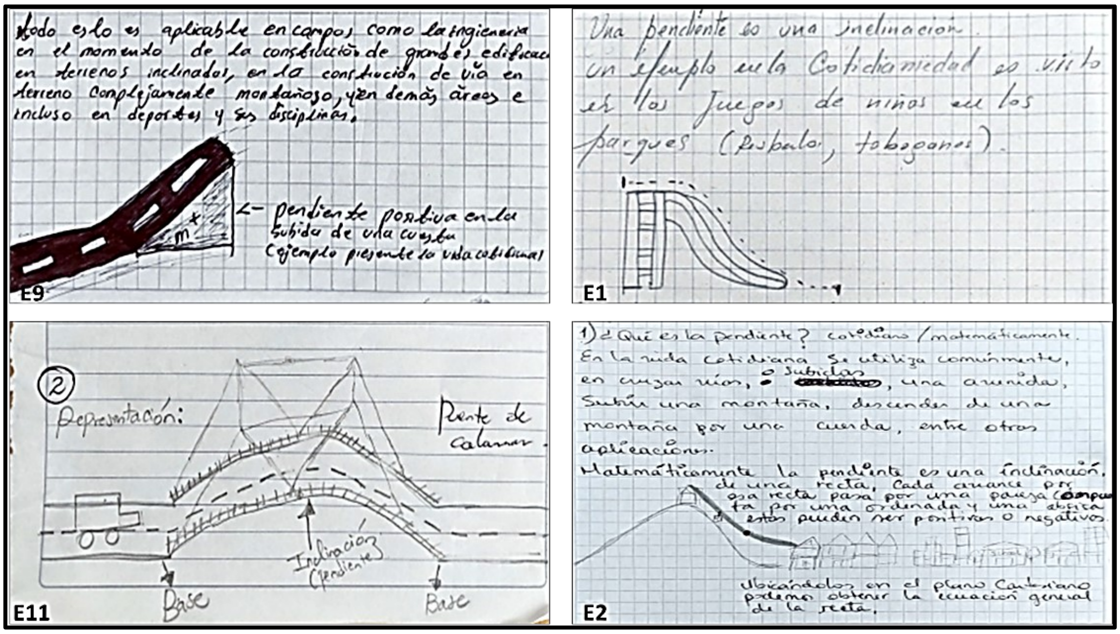


Figura 6. Representaciones de pendiente en situaciones del mundo real.

En estas situaciones del mundo real se identifican representaciones asociadas a la pendiente entendida como inclinación de puentes, rampas, drenajes, etc., que explícitamente, por un lado, dejan inferir que los futuros profesores establecieron conexiones matemáticas de tipo representaciones diferentes, específicamente, E9 usó el símbolo de la pendiente (m) y declaró que es una subida positiva. Por otro lado, en las producciones escritas de los futuros profesores se reconoció la conexión matemática metafórica porque relacionaron a la pendiente con experiencias de la vida cotidiana o ideas intuitivas que están impregnadas en el ser humano por distintas situaciones tangibles y corporales, que, en cierta manera, son concepciones iniciales sobre la pendiente. Por lo tanto, se sugiere que después de estas representaciones y metáforas se haga un análisis con otras conceptualizaciones para entender la pendiente como razón de cambio, la tangente del ángulo de inclinación, entre otros, y fortalecer visión corporal o física.

4.2. Conceptualización de Propiedad Física

Esta conceptualización se presentó con mayor frecuencia en las respuestas de los futuros profesores, al asumir "*la pendiente en términos de la inclinación de la recta*", declive, cuesta y grado de inclinación. La mayoría de ellos mostraron un enfoque visual cuando resolvieron las tareas 1 y 2, ya que se centraron en utilizar el ángulo de inclinación de las rectas al responder: “al interpretar la pendiente como el ángulo de inclinación de la recta respecto al eje de las abscisas”, (ver Figura 7). Solo un futuro profesor E_{18} presentó una confusión al comparar la pendiente como la inclinación enfatizando a una preferencia o gusto hacia un objeto o situación.

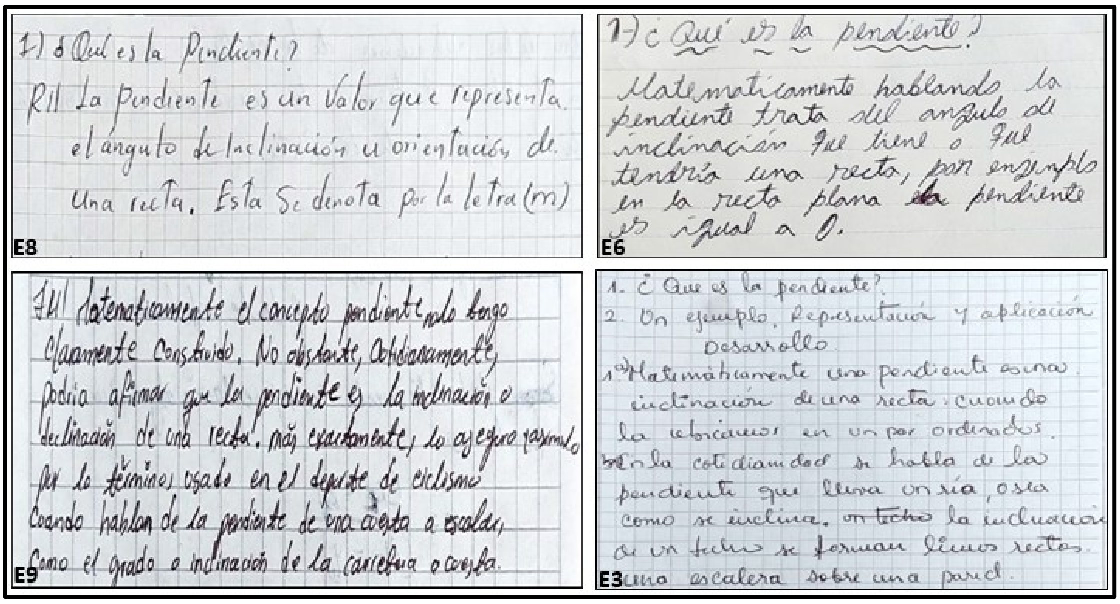


Figura 7. Definiciones de la pendiente y conexiones de significado.

En la Figura 7 se identifica información relevante que sugiere conexiones matemáticas de tipo significado (ver Figura 8), por ejemplo, E3, E6, E8 y E9 mencionan que “la pendiente (expresión) es el valor que representa el ángulo de inclinación de una recta (contenido)”. En contexto, se evidencia que los estudiantes usan simultáneamente conceptualizaciones de propiedad física y conexiones de significado, lo cual revela las concordancias entre ambos marcos conceptuales usados y coherentes para un análisis detallado de la pendiente.

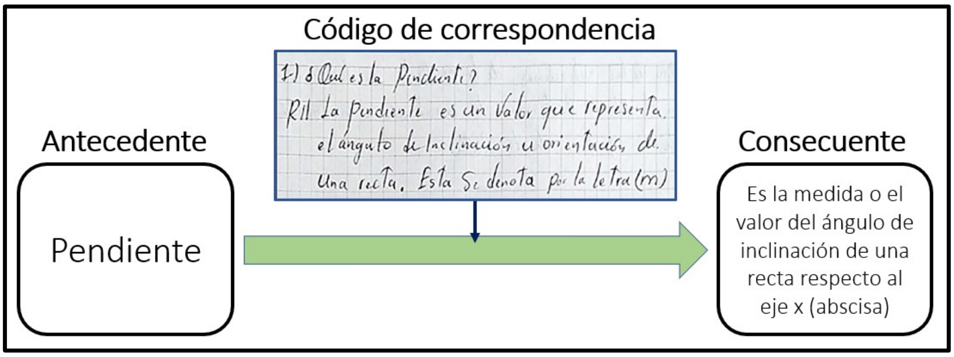


Figura 8. Conexión matemática de significado.

4.3. Conceptualización de Cálculo

La conceptualización de pendiente en Cálculo fue evidenciada por seis de los futuros profesores en la sexta tarea que integra el protocolo de la entrevista o cuestionario. Esta fue evocada al vincular “la derivada de una función valorada en un punto de la abscisa en el plano, como la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto". En esta línea, la mayoría de los participantes demostraron su desconocimiento con las conceptualizaciones con enfoque procedimental porque de 18 futuros profesores solo 6 emplearon adecuadamente la conceptualización de Cálculo. Además de utilizar procedimientos e ilustrar gráficas, realizan una narración del procedimiento o el paso a paso (ver Figura 9).

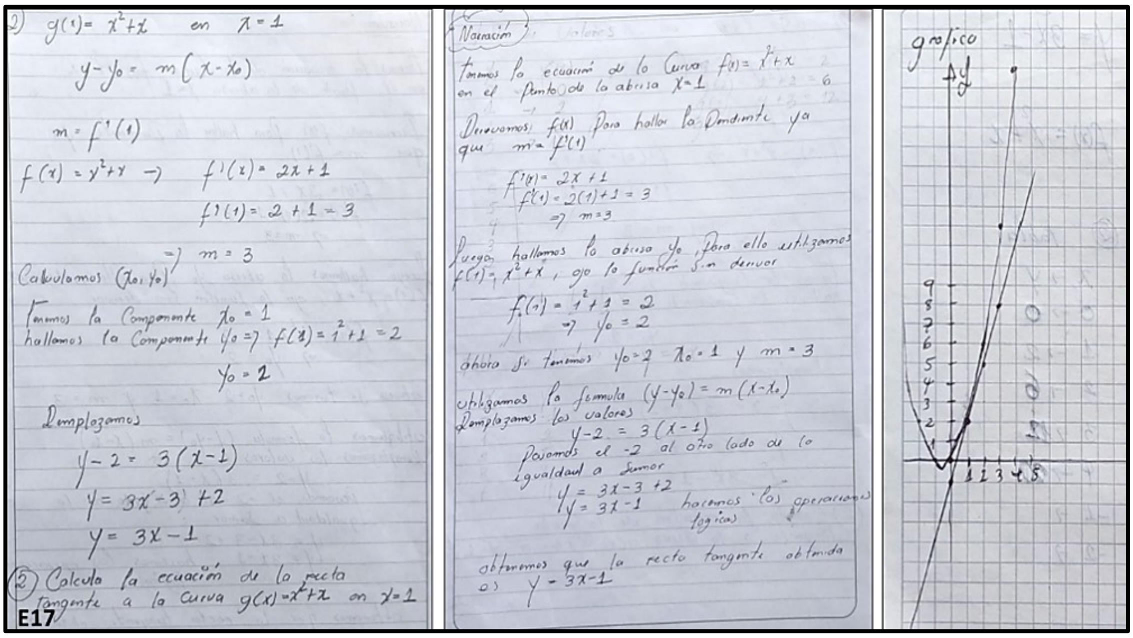


Figura 8. Enfoque procedimental del futuro docente E17.

E_{17} demostró dominio y claridad al utilizar la derivada evaluada en un punto como la pendiente de la recta tangente. Asimismo, hizo el paso a paso, ilustró con graficas la función $g(x) = x^2 + x$ y la ecuación de la recta tangente: $y = 3x - 1$.

Se reconoce que E6, E9, E10, E11, E12 y E17 establecieron las conceptualizaciones de la pendiente en Cálculo y en esta investigación se profundiza aún más porque estos futuros profesores simultáneamente hicieron conexiones matemáticas de tipo procedimental, parte-todo, representaciones diferentes y significado. Por ejemplo, los futuros profesores entienden y usan la derivada como la pendiente de la recta tangente en un punto, lo cual evidencia la conexión de significado. En el caso específico de E17 se presentan las conexiones siguientes:

- Primero, hizo la conexión procedimental cuando encuentra la derivada de $f(x) = x^2 + x$ obteniendo $f'(x) = 2x + 1$ donde implícitamente usó la fórmula para derivar la función potencia $(ax^n)' = anx^{n-1}$.
- Segundo, por medio de la conexión procedimental evaluó la derivada $f'(x) = 2x + 1$ en $x_0 = 1$, con el propósito de hallar la pendiente *m=3.*
- Tercero, evaluó la función $f(x) = x^2 + x$ en $x = 1$ para obtener la coordenada en $y_0 = 2$ y el punto de tangencia quedaría conformado por $(x_0, y_0) = (1, 2)$.
- Cuarto, sustituyó el valor de la pendiente *m=3* y el punto de tangencia $(1, 2)$ en la fórmula punto pendiente $y - y_0 = m(x - x_0)$ y luego, usó propiedades de las operaciones aritméticas, procesos algebraicos hasta obtener la ecuación de la recta tangente $y = 3x - 1$.

- Quinto, E17 construyó un plano cartesiano (conexión de representaciones diferentes).
- Sexto, E17 evaluó la función en diferentes valores de abscisa x para encontrar algunos puntos.

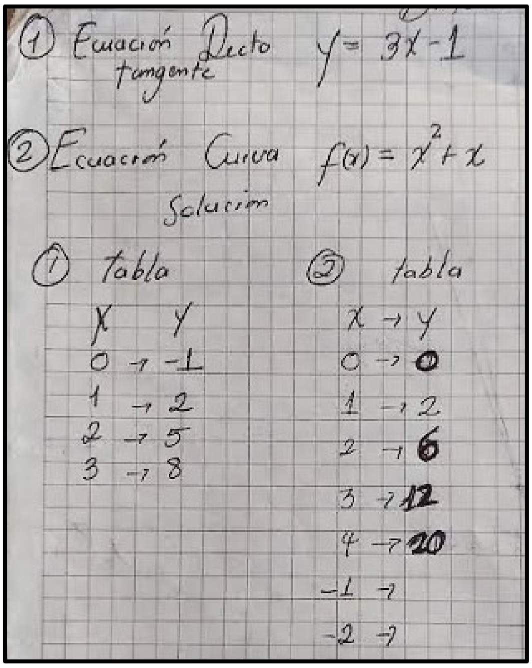


Figura 9. Registros tabulares para encontrar puntos de f y f'

- Séptimo, E17 dibujó la gráfica de la función $f(x) = x^2 + x$ (conexión de representaciones diferentes alterna).
- Octavo, E17 evaluó la función derivada en diferentes valores de abscisa x para encontrar algunos puntos.
- Noveno, dibujó la gráfica de la ecuación de la recta (conexión de representaciones diferentes alternas).
- Por último, décimo, comprobó que la recta sí es tangente a la curva de la función.

En síntesis, reconocemos que las conceptualizaciones en Cálculo y las conexiones matemáticas descritas con detalle, pueden llevar al sujeto a resolver problemas donde se necesite hallar la ecuación de la recta tangente y también, alcanzar un tipo de comprensión matemática de los conceptos de pendiente, derivada, función, entre otras, y evitar desconexiones donde se promueva la concepción alternativa (García-García y Dolores-Flores, 2019) de que la derivada es la recta tangente son enfatizar en la pendiente (Rodríguez-Nieto et al., 2021c).

4.4. Conceptualización de Razón Algebraica

Evidenciada en las producciones escritas de 11 de los futuros docentes participantes en esta investigación, las cuales fueron identificadas en una de las tareas propuestas al utilizar o definir la pendiente como $m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$. Esta conceptualización normalmente es la que más trabajan los estudiantes en las escuelas de educación secundaria y también los que cursan carreas de licenciatura en matemática (ver Figura 10).

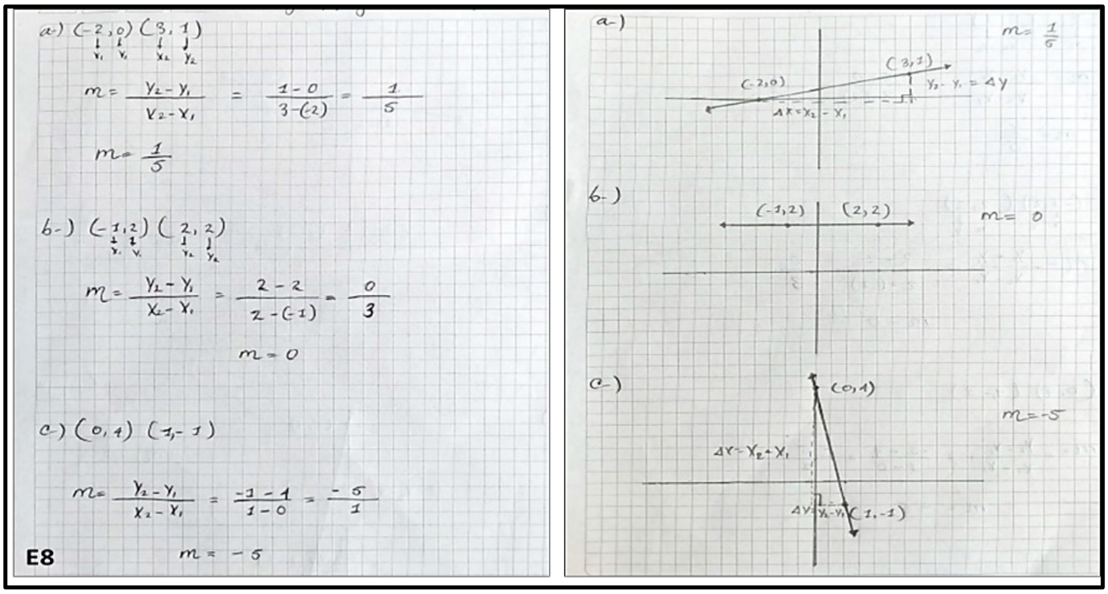


Figura 10. Enfoque procedimental del futuro profesor E8

Cabe destacar que, E8 realizó conexiones matemáticas de tipo procedimental al usar la fórmula para hallar la pendiente dados dos puntos. Además, se evidencia la conexión de tipo representaciones diferentes cuando E8 dibujó la recta que pasa por los puntos.

4.5. Conceptualización de coeficiente paramétrico

Se evidencia en la producción de seis futuros profesores, ya que en la resolución de la tarea 6 implementaron la ecuación punto pendiente $(y - y_0 = m(x - x_0))$ para hallar la ecuación de la recta tangente. Además, el participante **E9** utiliza un ejemplo de pendiente como coeficiente paramétrico, ya que considera el valor que acompaña a la variable x en la ecuación de la recta punto pendiente intercepto $y = mx + b$, haciendo referencia a la pendiente $(y = 2x + 3)$.

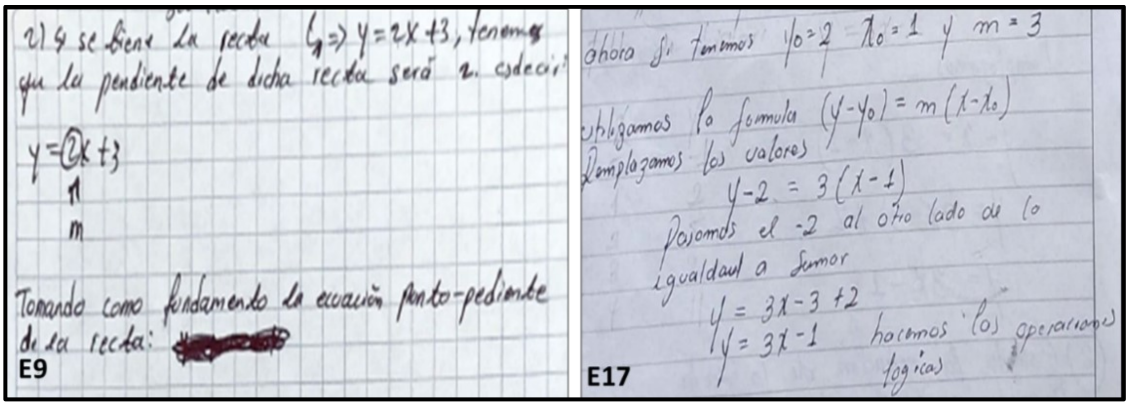


Figura 11. Producción escrita de dos futuros profesores.

En cuanto a las conexiones matemáticas se identificaron de tipo procedimental porque usan la fórmula punto pendiente para hallar la ecuación de la recta tangente, teniendo en cuenta un punto y la pendiente *m=3*.

4.6. Conceptualización de razón geométrica

Los futuros profesores E8 y E14 enfatizaron en la conceptualización de razón geométrica de la pendiente para ejemplificar la razón del desplazamiento vertical y desplazamiento horizontal en la gráfica de una recta.

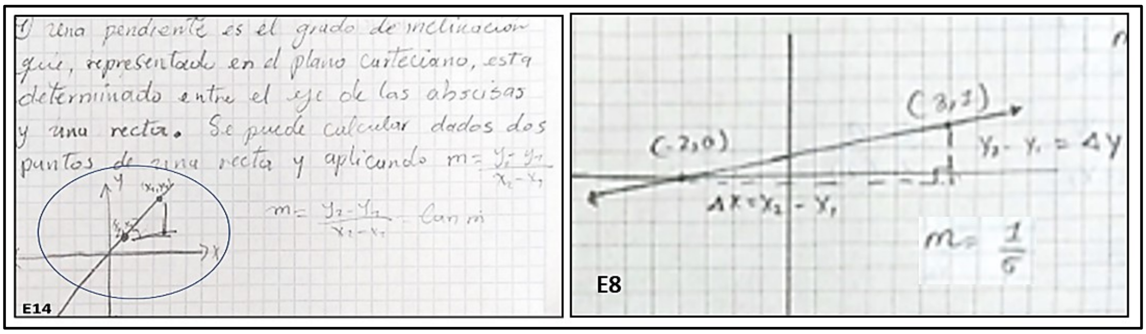


Figura 12. Producción escrita del futuro profesor E14

La conexión matemática evidenciada por E8 y E14 es de tipo representaciones diferentes dado que expresan de manera gráfica la recta y su pendiente.

4.7. Conceptualización de indicador de comportamiento

Esta conceptualización se evidenció en las producciones escritas de los futuros profesores que realizaron en tres de las tareas propuestas. Por ejemplo, esta conceptualización se manifestó cuando los participantes utilizaron “el signo de la pendiente para indicar el comportamiento de una recta a partir de su gráfica” (ver Figura 13). Además, E3 y E9 mencionaron que, si la gráfica sube la pendiente es positiva, cuando la gráfica baja la pendiente es negativa, cuando es paralela al eje de las abscisas no hay variación y cuando es paralela al eje de las ordenadas es indeterminada.

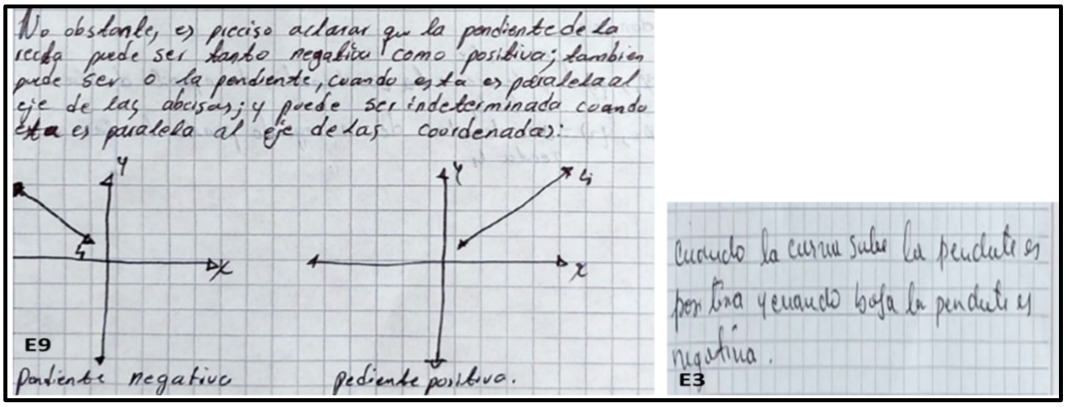


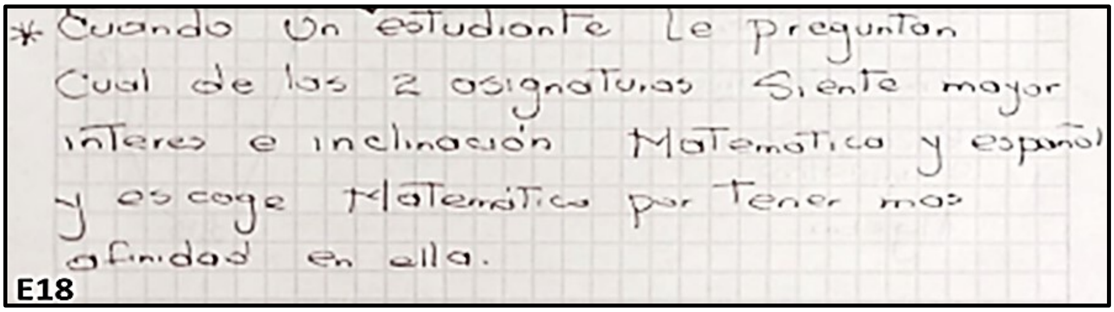
Figura 13. Producción escrita de E3 y E9.

Aunada a la información proporcionada en la Figura 13 sobre las conceptualizaciones, se pueden explicar la relevancia de las conexiones matemáticas de representaciones diferentes cuando E9 manifiesta el comportamiento de las rectas dependiendo de su signo.

También, en la Figura 13 se infieren conexiones de implicación dado que si la pendiente es positiva entonces la recta es creciente; si la pendiente es negativa entonces la recta es decreciente y si la pendiente es cero entonces la recta es paralela al eje x. Estas son conexiones esenciales y asociadas a la conceptualización de indicador de comportamiento.

4.8. Estudiante que no hizo conceptualización

El estudiante E18 no mencionó conceptualizaciones de pendiente, sino una concepción cotidiana de este concepto en la toma de decisiones. Este tipo de situaciones en futuros profesores muchas veces podría imposibilitar la comprensión de conceptos matemáticos, por lo tanto afirmamos que es importante seguir realizando este tipo de estudios, porque es la manera de que los profesores se enteren de qué es la pendiente, cómo se usa y cómo se está representando la diversidad de conceptualizaciones y/o significados, de lo contrario si a este profesor no se le explica explícitamente que es la pendiente podría obstaculizar su comprensión de este concepto y otros como la derivada.


* Cuando un estudiante le preguntan Cual de las 2 asignaturas siente mayor interes e inclinación Matemática y español y escoge Matemática por tener mas afinidad en ella.

E18

Figura 14. Nota del futuro docente E18.

4.9. Participación del estudiante en el aula de clase

En este apartado se describe sintéticamente la participación de un futuro profesor de matemáticas cuando pasó a la pizarra donde explicó el procedimiento para hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P_1(-2,0)$ y $P_2(3,1)$. En este contexto, primero utilizo la formula $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ debido que se le habían dado los puntos P_1 y P_2, luego, utilizó operaciones aritméticas y obtuvo la pendiente correctamente (en este caso el E5 estableció conexiones de tipo procedimental). Posteriormente, trazó la gráfica, pero E5 tuvo una inconsistencia dado que ubico de manera errada el punto P_1. Esto lleva a que en la utilización del triángulo no se corresponda con el valor de la pendiente $\frac{1}{5}$ que es equivalente a 0.2 ya que según la representación la pendiente toma valor de $\frac{1}{3}$ equivalente a 0.33, lo cual no es consistente con la pendiente hallada. Además, tiene una desconexión dado que no realizo una conexión de tipo procedimental lo cual repercute al hacer conexiones de tipo representaciones diferentes (ver Figura 16 y extracto de la transcripción).

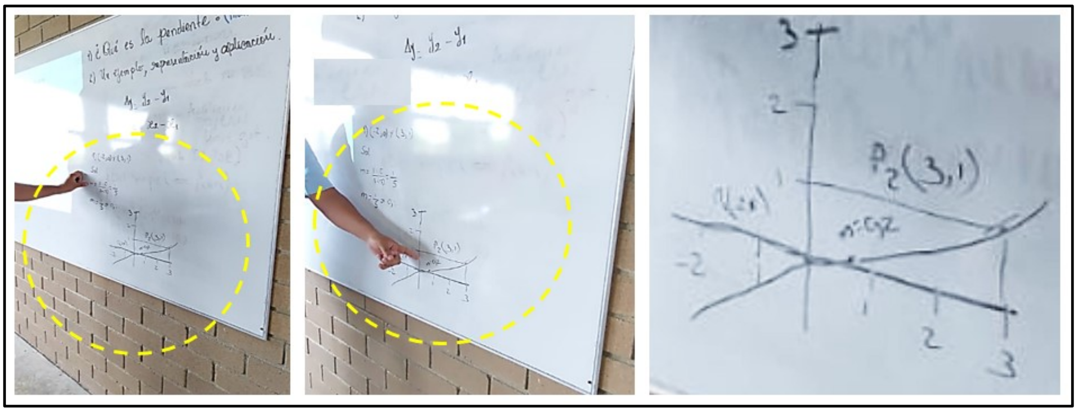


Figura 15. Participación del futuro profesor E5.

> E5: Primeramente, sabiendo los puntos apliqué la fórmula de la pendiente y luego, procedí a reemplazar los puntos correspondientes para hallar la pendiente, apliqué la fórmula y hallando el pendiente comienzo a graficarlo y ubico la pendiente dentro de la gráfica.
>
> E5: ¿Cuál es la pendiente? m=0.2 ¿Por qué? De acuerdo con la fórmula me da 1/5 y la forma decimal me da 0.2.

Sin embargo, E5 después de asistir a la explicación en la pizarra corrigió su producción escrita (ver Figura 16), es decir, fue prácticamente un aprendizaje logrado a partir de la sugerencia realizada por el profesor titular y sus compañeros (futuros profesores). Sin lugar a duda, que este tipo de escenarios permiten mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos basado en conexiones matemáticas, es este caso el concepto de pendiente.

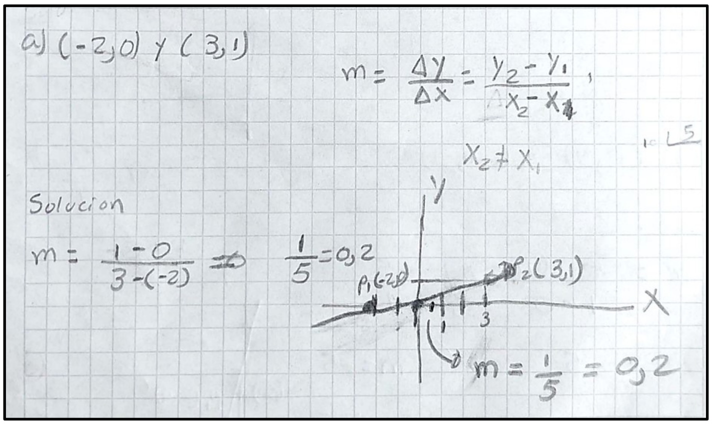


Figura 16. Producción escrita de E5 corregida.

Las conexiones matemáticas evidenciadas en este estudio permiten valorar la comprensión de los futuros profesores de matemáticas (participantes) en concordancia con lo planteado por Berry y Nyman (2003), García-García y Dolores-Flores (2019) y Rodríguez-Nieto et al. (2022a). Asimismo, las conceptualizaciones de la pendiente son elementos importantes para la enseñanza de la pendiente de una recta y su influencia en la enseñanza y aprendizaje de otros conceptos como la derivada, las funciones, problemas de optimización, etc. (Beyerley y Thompson, 2017; Dolores-Flores et al., 2019; Stump, 1999; Teuscher y Reys, 2010).

En este estudio compartimos y coincidimos con las reflexiones de Cho y Nagle (2017) cuando afirman que, los estudiantes tienen dificultades para representar la pendiente gráficamente por la no comprensión de la subida sobre la carrera (rise over run). Algo similar sucedió con E5 cuando graficó la recta y no conservó la pendiente hallada. Se puede decir que si E5 hubiese considerado la conceptualización de razón geométrica se hubiese dado cuenta que no cumplía m=1/5. Además, en este estudio la mayoría de los futuros profesores hallaron la ecuación de la recta tangente a la curva usando la conceptualización en Cálculo a diferencia del estudio de Rodríguez-Nieto et al. (2021c) donde un futuro profesor tuvo dificultades para encontrar la ecuación de la recta tangente porque entiende a la derivada como la recta tangente sin mencionar la pendiente.

CONCLUSIONES

En este estudio se analizaron las conceptualizaciones y conexiones matemáticas en el contexto de la resolución de tareas acerca de la pendiente, lo cual dejó ver que, es un concepto importante en las enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pero a la vez dificultoso para algunas personas, de hecho, algunos futuros profesores están arraigados a que la pendiente es “estar atento en hacer una acción” o toma de decisiones. Por lo tanto, sostenemos que es necesario seguir promoviendo las conceptualizaciones de la pendiente en cursos de bachillerato y universidad para mejorar la comprensión de conceptos superiores o de Cálculo.

La presentación de esta investigación fue motivada por la alta ausencia de conexiones entre conceptualizaciones de la pendiente y como sugerencia del estado de las investigaciones en la literatura (Abreu-Blaya et al., 2020). Pero, nosotros sugerimos profundizar en 1) las conexiones entre las conceptualizaciones y su influencia en las clases de los profesores de matemáticas. 2) profundizar en la pendiente cuando se proponen problemas relacionados con la razón de cambio o problemas de aplicación. 3) promover con mayor frecuencia las conceptualizaciones: trigonométrica, constante lineal, funcional y propiedad determinante, las cuales no usaron los futuros profesores.

Una de las limitaciones de este estudio es la población de futuros profesores (n=18) los cuales arrojaron buenos resultados, pero el estudio podría ampliarse para una mayor recogida de datos y ampliación de la investigación sobre la pendiente. Consideramos que, para otra investigación además de las producciones escritas se realicen entrevistas o fomentar la participación en el aula de clases de bachillerato o en la universidad con el fin de colectar las explicaciones de cada sujeto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abreu-Blaya, R., Dolores, C., Sánchez, J. L., & Sigarreta, J. (2020). El concepto de pendiente: estado de la investigación y prospectivas. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *103*, 81-98.

Aguilar, S., & Barroso, J. (2015). La triangulación de datos como estrategia en investigación educativa [data triangulation as education researching strategy]. Píxel-Bit. Revista de Medios y Educación, 45, 73-88. https://doi.org/10.12795/pixelbit.2015.i47.05

Berry, J., & Nyman, M. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. The Journal of Mathematical Behavior, 22(4), 479-495.

Beyerley, C., & Thompson, P. (2017). Secondary Mathematics Teachers' Meanings For Measure, Slope, And Rate Of Change. Journal of Mathemaical Behaviour, 48, 168-193.

Businskas, A. M. (2008). Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections [Tesis de Doctorado no publicada]. Simon Fraser University.

Campo-Meneses, K. G., & García-García, J. (2021). La comprensión de las funciones exponencial y logarítmica: una mirada desde las conexiones matemáticas y el enfoque ontosemiótico. PNA, 16(1), 25-56. https://doi.org 10.30827/pna.v16i1.15817

Campo-Meneses, K., Font, V., García-García, J., & Sánchez, A. (2021). Mathematical Connections Activated in High School Students' Practice Solving Tasks on the

Exponential and Logarithmic Functions. EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 17(9), em1998. https://doi.org/10.29333/ejmste/11126

Cho, P., & Nagle, C. (2017). An analysis of students' mistakes on routine slope tasks. In: GALINDO, E. and NEWTON, J., (ed.). Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Indianapolis: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators, 2017. p. 645–652.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). *Research methods in education*. London and New York: Routledge.

De Gamboa, G., Caviedes, S., & Badillo, E. (2022). Mathematical Connections and the Mathematics Teacher's Specialised Knowledge. *Mathematics*, *10*(21), 4010.

Deniz, Ö., &Kabael, T. (2017). 8th Grade Students' Processes of the Construction of the Concept of Slope, Education and Science, 42(192), 139−172.

Dolores-Flores, C., & García-García, J. (2017). Conexiones intramatemáticas y extramatemáticas que se producen al resolver problemas de cálculo en contexto: un estudio de casos en el nivel superior. Bolema. Boletim de Educação Matemática, 31 (57), 158-180.

Dolores, C., Moore-Russo, D., & Rivera, I. (2020). Conceptualizations Of Slope In Mexican Intended Curriculum. School Science and Mathematics, 120, 104-115.

Dolores, C., & Mosquera, G. (2021). Conceptualizaciones De La Pendiente En El Curriculon Colombiano De Matemática. Educación Matemática, 34(2), 217-244.

Dolores, C., Sánchez, J., Sigarreta, J., & Abreu, R. (2020). El Concepto De Pendiente: Estado De La Investigación y Prospectiva. Revista De Didáctica De Las Matemáticas, 103, 81-98.

Dolores-Flores, C., Rivera-Lopez, M., & Garcia-Garcia, J. (2018). Exploring Mathematical Connections Of Pre University Students Through Tasks Involving Rates. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 1-22.

Dolores-Flores, C., & Ibáñez-Dolores, G. (2020). Conceptualizaciones de la pendiente en libros de texto de matemáticas [Slope conceptualizations in mathematics textbooks]. Bolema: Mathematics Education Bulletin, 34, 825-846. https://doi.org/10. 1590/1980-4415v34n67a22

Eli, J.; Mohr-Schroeder, M.; Lee, C. Mathematical connections and their relationship to mathematics knowledge for teaching geometry. School Science and Mathematics, Australia, v. 113, n. 3, p. 120-134, 2013.

Eli, L., Mohr-Schroeder, M., & Lee, C. (2011). Exploring mathematical connections of prospective middle-grades teachers through card-sorting tasks. Mathematics Education Research Journal, Australia, 23(3), 297-319, 2011.

Evitts, T. (2004). Investigating the Mathematical Connections that Preservice Teachers Use and Develop While Solving Problems from Reform Curricula. 2004. 308f. Thesis (Doctor of Philosophy) - Pennsylvania State University College of Education, Pennsylvania.

García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2018). Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49(2), 227–252. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1355994

García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2020). Explorando las conexiones matemáticas de los estudiantes preuniversitarios al resolver problemas de aplicación de cálculo, Revista internacional de educación matemática en ciencia y tecnología. DOI: 10.1080/0020739X.2020.1729429.

García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2019). Pre-university students' mathematical connections when sketching the graph of derivative and antiderivative functions. *Mathematics Education Research Journal*, https://doi.org/10.1007/s13394-019-00286-x

Hatisaru, V. (2022). Mathematical connections established in the teaching of functions. Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA, 1-21.

Kenedi, A. K., Helsa, Y., Ariani, Y., Zainil, M., & Hendri, S. (2019). Mathematical connection of elementary school students to solve mathematical problems. Journal on Mathematics Education, 10(1), 69-80.

Mhlolo, M., Venkat, H., & Schäfer, M. (2012). The nature and quality of the mathematical connections teachers make. Pythagoras, 33(1), 1-9. Recuperado de http://dx.doi.org/10.4102/pythagoras.v33i1.22

Ministerio de Educacion Nacional de Colombia, MEN. (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, Matematicas, ciencia y ciudadanas. Bogota, Colombia: MEN.

National Council of Teachers of Mathematics, NCTM. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston: NCTM.

Orts-Muñoz, A., Llinares Ciscar, S., & Boigues Planes, F. J. (2018). Trayectorias de aprendizaje del concepto de recta tangente en alumnos de Bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, *36*(3), 121-140.

Rivera, I., Salgado, B., & Dolores, C. (2019). Explorando Las Conceptualizaciones De La Pendiente En Estudiantes Universitarios. Scielo, 33(65), 1027-1046.

Rivera, M., & Dolores, C. (2021). Preconcepciones De Pendiente En estudiantes De Educación Secundaria. *Enseñanza De Las Ciencias Revista De Investigación y Experiencias Didácticas*, 195-217.

Rodríguez-Nieto, C. A. (2021). *Análisis de las conexiones matemáticas en la enseñanza y aprendizaje de la derivada basado en un networking of theories entre la teoría de las conexiones y el enfoque ontosemiótico* [Analysis of mathematical connections in the teaching and learning of the derivative based on a networking of theories between the theory of connections and the onto-semiotic approach] [Unpublished doctoral dissertation] Universidad Autónoma de Guerrero.

Rodríguez-Nieto, C. A., Rodríguez-Vásquez, F. M., Font, V. & Morales-Carballo, A. (2021a). Una visión desde el networking TAC-EOS sobre el papel de las conexiones matemáticas en la comprensión de la derivada. Revemop, 3, e202115, 1-32. https://doi.org/10.33532/revemop. e202115

Rodríguez-Nieto, C., Rodríguez-Vásquez, F., & García-García, J. (2021c). Pre-service Mathematics Teachers' Mathematical Connections in the Context of. Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 12(1), 203_220.

Rodríguez-Nieto, C. A., Font, V., Borji, V., & Rodríguez-Vásquez, F. M. (2022a). Mathematical connections from a networking theory between extended theory of mathematical connections and onto-semiotic approach. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 53(9), 2364-2390. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1799254

Rodríguez-Nieto, C. A., Rodríguez-Vásquez, F. M., & Font, V. (2022b). A new view about connections: the mathematical connections established by a teacher when teaching the derivative. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *53*(6), 1231-1256.

Rodríguez-Nieto, C. A., Rodríguez-Vásquez, F. M., & García-García, J. (2021b). Exploring university Mexican students' quality of intra-mathematical connections when solving tasks about derivative concept. EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 17(9), em2006. https://doi.org/10.29333/ejmste/11160

Salgado, R., Rivera, I., & Dolores, C. (2020). Conceptualizacion De Pendiente: Contenido Que Enseñan Los Profesores Del Bachillerato. Revista Iberoamericana De educacion Matemática (57), 33-48.

Sánchez, j., Cabrera, A., Cruz, M., & Sigarreta, J. (2022). El significado Del Concepto De Pendiente Desde La Perspectiva Universitaria. Revista Cientifica De La Universidad De Cienfuegos, 14(4), 156-171.

Sánchez, J., Sigarreta, J., & Ramirez, M. (2021). Estudio De Los Significados Para La Enseñanza Que Poseen Los Profesores Acerca Del Concepto De Pendiente. Educacion Matematica, 33(3), 141-171.

Stanton, M., & Moore-Russo, D. (2012). Conceptualizations of Slope: A Review of State Standards. School Science and Mathematics, Hoboken, 112(5), 270-277.

Stump, S. (1999): Secondary Mathematics Teachers' Knowledge of Slope. Mathematics Education Research Journal, 11 (2), 124-144.

Teuscher, D., & Reys, R. (2010). Slope, rate of change, and steepness: Do students understand these concepts? Mathematics Teacher, 103, 519–524.

Weber, E., Tallman, M., & Middleton, J. (2015). Developing elementary teachers' knowledge about functions and rate of change through modeling. Mathematical Thinking and Learning, London, 17(1), 1–33.