



## Significado de la derivada desde un enfoque Newtoniano: Una propuesta del seminario de profundización “Una mirada más profunda al cálculo diferencial e integral

**Mg. Sergio Mauricio Farfán Núñez<sup>1</sup>**

[sergiofarfan11@hotmail.com](mailto:sergiofarfan11@hotmail.com)

<https://orcid.org/0000-0003-3383-1989>

Institución Educativa Agroecológico  
Amazónico Buinaima  
Florencia – Colombia

**Mg. Gina Katherine Cuéllar Pulido**

[gina.k.athe@hotmail.com](mailto:gina.k.athe@hotmail.com)

Universidad de la Amazonia  
Florencia – Colombia

<https://orcid.org/0009-0003-5879-5862>

**Mg. Javier Hernando Oliveros Ramos**

[javieroliverosramos@gmail.com](mailto:javieroliverosramos@gmail.com)

<https://orcid.org/0000-0001-6208-851X>

Institución Educativa Rural Bajo Caldas

**Mg. Yeisson Andrés Giraldo Ramírez**

[yeissonandres13@gmail.com](mailto:yeissonandres13@gmail.com)

Institución Educativa Marco Fidel Suárez

<https://orcid.org/0009-0003-1681-4842>

### RESUMEN

El presente artículo es el resultado del trabajo realizado en el seminario alemán *una mirada más profunda al cálculo diferencial e integral* llevado a cabo en la universidad de la Amazonia como opción de grado de la licenciatura en matemáticas y física, en el que se consideró necesario estudiar el significado de la derivada a partir de la búsqueda de documentos e investigaciones sobre la derivada y desde ahí realizar una serie de visitas a la Institución Educativa Antonio Ricaurte donde se daría inicio al desarrollo de la propuesta de intervención originada en el seminario. La intervención del equipo tuvo lugar en el grado undécimo donde se comenzó con la caracterización socio familiar y aplicación de un instrumento diagnóstico para identificar debilidades y fortalezas de los estudiantes sobre conceptos previos de la cinemática, ya que el interés de estudiar la derivada desde el punto de vista newtoniano surge de conceptos propios de la física. Una vez realizado el análisis del diagnóstico se dio paso a la construcción de una actividad macro sobre la cual estaría centrada la investigación. En esta actividad se construyó un instrumento que permitiría a los jóvenes desarrollar una práctica de laboratorio utilizando como instrumento principal un contenedor de control de volumen, luego una vez realizado todo este proceso se procedió a presentar los resultados de la actividad de forma cualitativa.

**Palabras clave:** *seminario alemán; derivada; enfoque newtoniano; calculo diferencial.*

---

<sup>1</sup> Autor Principal

# **Meaning of the derivative from the Newtonian approach: a proposal from the deepening seminar a deeper look at differential and integral calculus**

## **ABSTRACT**

This article is the result of the work developed in the German seminar “a deeper look at differential and integral calculus”. This study was carried out at the University of Amazonia as an option degree for the degree in mathematics and physics. It was considered necessary to study the meaning of the derivative from documents research and investigation on the derivative. Since that, there were made a series of visits to the Antonio Ricaurte school, where the development of the intervention proposal began. The intervention of the team took place in the eleventh grade. It was started with the socio-family characterization and application of a diagnostic instrument to identify students weaknesses and strengths regarding previous concepts of kinematics, as the interest in studying the derivative from the Newtonian point of view appears from concepts of physics. Once the analysis of the diagnosis was done, the construction of a macro activity on which the investigation was centered began. In this activity, an instrument was built which allowed young people to develop a laboratory practice using a volume control container as the main instrument. Then, once this process was completed, the results of the activity were presented qualitatively.

**Keywords:** *german seminary; derivative; newtonian approach; diferencial calculus.*

*Artículo recibido 15 febrero 2023*

*Aceptado para publicación: 15 marzo 2023*

# 1. INTRODUCCIÓN

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas surgen situaciones en las que los estudiantes cuestionan la importancia del área planteando interrogantes como: ¿para qué sirven las matemáticas? ¿existen otras formas de aprender matemáticas?, dichos interrogantes incitan a pensar que posiblemente esto se debe a que, en la escolaridad, el discurso de los profesores se fundamenta en las formalizaciones de los conceptos matemáticos, sin aplicaciones directas en el contexto real; lo cual, trae como consecuencia que los estudiantes no sean capaces de identificar las situaciones donde tales conceptos puedan ser utilizados.

Con el ánimo de encontrar una estrategia que permitiera abordar la enseñanza de un objeto matemático en la educación media se creó el seminario de profundización, *una mirada más profunda al cálculo diferencial e integral*, en el que se abordó la metodología del seminario alemán como práctica pedagógica, con la que se busca que estudiantes y profesionales se reúnan para conversar sobre una temática específica o sobre un problema social cuya finalidad es investigar y descubrir a través de la revisión documental, y no se dé más la repetición de los saberes en el salón de clases (Pérez, 2010). Según, Vaccarezza, Oliva, Pérez, y Reyes (2017), la estructura del seminario alemán se compone de seis (6) elementos centrales, estos son:

- (1) *Director*: es la persona que tiene mayor dominio y conocimiento del tema. Por tanto, debe dirigir a los estudiantes regulando argumentos. Se elige un director por equipo de trabajo, esta elección la hace el mismo equipo de estudiantes.
- (2) *Relatores*: dos alumnos que exponen el tema durante 10 minutos.
- (3) *Correlatores*: dos estudiantes que complementan durante 10 minutos la exposición del relator, y la enriquecen con base en la bibliografía revisada.
- (4) *Protocolante*: estudiantes que deben registrar los aportes críticos, propuestas y preguntas que sirvan de síntesis y de construcción conceptual de lo argumentado. Debe, además, dar cuenta de lo ocurrido en una sesión posterior a la del seminario.
- (5) *Moderador*: es elegido entre la audiencia para coordinar la sesión, otorgar la palabra y llevar el control del tiempo de ambos equipos.
- (6) *Los*

*participantes*: son los alumnos que no desempeñan un rol y conforman la audiencia que realiza preguntas a ambos equipos de debate. (pág. 221)

Por lo tanto, estos elementos se tuvieron en cuenta para la ejecución de las actividades del seminario de profundización, donde se contó con la participación de 16 profesores en formación de la licenciatura en matemáticas y física de la Universidad de la Amazonia. A continuación, se describe el proceso desarrollado: cada equipo de cuatro (4) estudiantes realizó la revisión documental sobre un objeto matemático y lo presentó a los compañeros en una sesión de 1 hora y 30 minutos, más 20 minutos de una sesión posterior para extraer las ideas o conceptos centrales. Durante cada sesión se desarrolló el debate entre los equipos de trabajo con el acompañamiento de un estudiante que hacía las veces de moderador, quien estableció el orden de participación de los equipos. Luego, para el proceso evaluativo se definen los criterios, los cuales debían ser concertados al inicio de la sesión, para este caso el docente (coordinador) junto con tres (3) estudiantes (participantes) seleccionados con anterioridad evaluaban la experiencia para luego hacer la retroalimentación y sacar las conclusiones finales.

Como resultado de las discusiones en el seminario alemán de profundización, uno de los equipos participante indagó en el estudio de un objeto matemático que se caracterizará por su conceptualización, algoritmos y complejidad en las aplicaciones prácticas, esto con el fin de hallar una estrategia didáctica que facilite su enseñanza y aprendizaje en la educación media, por lo que se pensó *en la derivada* como objeto de estudio, ya que, la derivada por ser un objeto matemático de mucha relevancia en el último grado de la educación media, se considera que debe ser enseñado de manera dinámica sin la exigencia de algoritmos para facilitar la transición de los aprendizajes hacia la educación superior, por lo que fue fundamental preguntarse, ¿cómo se podría llevar a cabo el aprendizaje de la derivada sin causar desánimo o desinterés en el estudiante? Es así, que se recurre al trabajo realizado en el seminario de profundización, el cual consistió en la revisión documental sobre conceptos tales como: series, sucesiones y el significado de la derivada desde un enfoque físico o newtoniano. Esta revisión se desarrolló a partir de la búsqueda de tópicos sobre derivada, artículos y tesis relacionadas, que permitieron avanzar hacia el planteamiento de la pregunta problema, al igual que en el diseño y aplicación del instrumento diagnóstico para aproximar al equipo investigador a los obstáculos conceptuales de los estudiantes de una institución educativa de la ciudad de Florencia. Como resultado

de lo mencionado anteriormente, surge la pregunta problema: *¿Qué estrategia didáctica favorece el aprendizaje del significado de la derivada desde un enfoque newtoniano o físico en estudiantes del nivel de educación media?*

La revisión documental permitió llegar a algunos trabajos importantes sobre la enseñanza y aprendizaje del objeto matemático de la derivada, donde se realizaron hallazgos interesantes que se mencionan a continuación:

No es fácil para los estudiantes adentrarse en el campo del análisis elemental (estudio inicial de los conceptos relacionados con la derivada). Las investigaciones didácticas desarrolladas en esta área, desde hace más de 15 años, lo demuestran con claridad (Tal, 1991; Artigue & Irvin, 1992; Farfán, 1993, citado en Artigue, 1998); sin embargo, dicha situación sigue presente en las instituciones educativas de Florencia.

Constantemente, se escucha a docentes del área de matemáticas afirmar que cada día los estudiantes muestran menos interés en aprender conceptos matemáticos, posiblemente se deba a que el estudiante no le encuentra sentido ni significado a la matemática que se le enseña a través de algoritmos y secuenciaciones, porque se omiten las situaciones que permitieron que nazca el conocimiento (Parra & Cordero, 2007). En este mismo sentido, los autores manifiestan la falta de actividades que promuevan en los estudiantes la utilización de las ideas y conocimientos adquiridos por la experiencia, pues esto les servirá para derivar conclusiones y afirmaciones producto del estudio de su realidad o contexto, es así como se potencia el pensamiento crítico y se supera el estado de la memorización de conceptos. Por otro lado, Parra y Cordero (2007), afirman que para lograr tal propósito es importante “hacer al estudiante participe de su conocimiento y no sólo un espectador, de tal forma que pueda construir una variedad de significados basados en su experiencia”, de ahí la importancia de proponer actividades que le permita al estudiante interactuar con el entorno y derivar conclusiones de lo observado. Desde esta perspectiva, un aspecto enriquecedor de las ciencias físicas es el aspecto experimental, pues poder analizar los fenómenos naturales en tiempo real, hace que el estudiante visualice el aprendizaje como algo intrínseco de su vida. Sin embargo, para poder comunicar los resultados se hace necesario la modelación de dichos fenómenos, es decir transformar dichas observaciones en conocimiento científico. En consecuencia, Rodríguez (1999), citado en Llancaqueo, Caballero, y Moreira (2003), plantea que:

...los conceptos se entienden como representaciones mentales de clases (de situaciones, objetos, eventos, individuos) que incluyen información de las instancias de la clase más información adicional que se relaciona con la definición de la clase en relación con otros conceptos, más información procedente de la percepción, de la vivencia de experiencias, de las inferencias realizadas. (pág. 44)

Tal vez, este es el aspecto que no se ha aprovechado completamente por parte de los docentes de matemáticas, porque es precisamente esa íntima relación entre conocimientos y experiencia la que debe llevar a cambiar la actual enseñanza de las matemáticas. Con respecto a esto, Furió (1994), lo señala como una presentación sistémica de las necesidades formativas actuales de un profesor que quiera incorporar a sus estrategias didácticas aquellas exigencias derivadas de un planteamiento constructivista de la enseñanza.

Desde la retórica de los orígenes de la matemática, se ha establecido una relación intrínseca con los elementos del cálculo infinitesimal, logrando con este último campo el reconocimiento total de una ciencia fundamental que ha logrado explicar muchos de los fenómenos que antiguamente eran indescifrables para el hombre. Hoy en día, se puede afirmar que casi todas las manifestaciones del universo se pueden modelar matemáticamente con ayuda del cálculo infinitesimal. Es por esta razón que una de las metas que se debe proponer en la educación matemática es la de desarrollar en los estudiantes las competencias necesarias para “entender y controlar el mundo cambiante en que vivimos” (Stewart, 1998). Por eso la enseñanza de la derivada, no puede seguir siendo aquella que se reduce a la presentación formal a partir de la definición del límite, pues investigadores como, Cornu (1983) plantean que, el concepto de límite es el mayor causante de problemas en el aprendizaje de la derivada, e identifica obstáculos epistemológicos como la falta de sentido común del término, la generalización de las propiedades de los procesos finitos a los procesos infinitos, la metacognición del infinito y los conceptos infinitamente grandes e infinitamente pequeños.

Por lo anterior, se considera de vital importancia generar nuevas estrategias que propendan por la enseñanza y de aprendizaje de objetos matemáticos basados en la integración de las ciencias, como las matemáticas y las ciencias física.

## 1.1. Antecedentes

Desde esta perspectiva, algunas de las investigaciones que se presentan a continuación, han dado sustento teórico para una aproximación del significado de la derivada, teniendo como punto de partida las dificultades en la enseñanza aprendizaje de este objeto matemático, así como el tratamiento didáctico que estos trabajos desarrollaron desde diferentes enfoques como la variación, regularidades y patrones y sin utilizar la definición de límite, dando solidez a la idea del enfoque newtoniano de la derivada, que es la intención del presente trabajo.

Tal es el caso de la investigación desarrollada por Parra y Cordero (2009) , denominada “la derivada como razón de acumulación o agotamiento” donde el énfasis fue la resignificación del conocimiento matemático sin profundizar en los conceptos. Se trató el tema de la derivada para lograr esa resignificación, al mismo tiempo que se seleccionó el tema de “la conservación de la masa” en los fluidos; estos elementos fueron estudiados bajo la epistemología de las gráficas, ya que los autores manifiestan que la graficación se considera una práctica social para generar conocimiento. Entre los resultados más importantes destacan que se debe dar sentido a las gráficas de acumulación o agotamiento que corresponde a la derivada con base a dos estados: entrada y salida de flujo. También se logró dar significado a los puntos máximos, mínimos, cero, a los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la gráfica de la derivada lo cual se evidencia en sus argumentos.

De igual manera, se encontró que Vrancken, Engler, y Müller (2009) en su trabajo “una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación. análisis de resultados” exponen la importancia del aprendizaje del cálculo ya que lo consideran uno de los mayores desafíos de la educación actual. La propuesta se llevó al aula con alumnos cursantes de Matemática II de la carrera Ingeniería Agronómica de la Universidad Nacional del Litoral y se basó en el análisis de los errores y dificultades en el aprendizaje de contenidos básicos del cálculo por medio del diseño, ejecución y evaluación de secuencias didácticas donde se priorizaron los tratamientos de los errores. La propuesta concluye que es importante analizar el tratamiento del tema de funciones pues, muchos de los problemas están relacionados con este concepto. También es necesario promover las tareas que conecten los distintos sistemas de representación porque de esta manera se logra que los alumnos favorezcan la visualización de las ideas y por ende los llevará a la aprehensión de dichos conceptos.

A esta revisión, se suma la investigación de Lozano (2011) titulada “desarrollo del concepto de la derivada sin la noción del límite” en la que describe los fundamentos del desarrollo de la derivada sin la noción del límite y plantea una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de la derivada, a partir, del cociente de incrementos, dirigida a estudiantes de último año de secundaria y primeros semestres de educación superior con la cual se busca la apropiación y aplicación del concepto de la derivada en diversos contextos. Concluyendo de esta manera que “ en la enseñanza de las matemáticas se hace necesario trabajar haciendo uso de modelos sencillos y prácticos” (pág. 63).

## **1.2. Marco conceptual**

### ***1.2.1. Una mirada retrospectiva del cálculo diferencial e integral***

El origen del cálculo infinitesimal, se remonta a la época clásica de Grecia (siglo III A.C) aproximadamente, donde matemáticos y físicos como Arquímedes ya ondeaban en los terrenos de las cantidades cambiantes, sin embargo, no se había logrado una formalización de los conceptos matemáticos involucrados en el cálculo, esto solo se estableció 20 siglos después con los estudios de Isaac Newton y Gottfried Leibniz, quienes desde lugares y perspectivas diferentes abordaron problemas clásicos de tipo geométrico y físico, el primero se refiere al problema de la tangente a una curva y el problema del área, el segundo a la velocidad de un cuerpo en un determinado instante de tiempo, estos problemas parecen ser muy diferentes, pero resulta que hay una conexión muy estrecha entre ellos (Stewart, 2013).

### ***1.2.2. Cálculo de fluxiones de Isaac Newton: El enfoque Newtoniano***

**Respecto al origen de las fluxiones de Isaac Newton, Montesinos (2009), menciona que:**

En 1669 Isaac Newton escribe, *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, donde esquematiza espléndidamente los procedimientos que conducían a la resolución de los dos problemas fundamentales relacionados con el estudio de una curva, la obtención de la recta tangente a una curva en un punto y la obtención del área limitada por la curva. (pág. 86)

En la actualidad, el problema de la recta tangente a una curva se designa con el nombre de derivada o variación instantánea de la curva en el punto, cuya aplicación más notable se encuentra en el campo de la física con la velocidad instantánea de un cuerpo en un determinado instante de tiempo, y se representa

mediante la expresión matemática:

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Que de acuerdo con, Stewart (2013), puede interpretarse como la razón de cambio instantánea de  $x$  con respecto a  $t$ , o sea, la pendiente de la recta tangente en el punto  $P(t_1, x(t_1))$  de la curva de desplazamiento. De igual forma, el otro problema se refiere a la integral que en física significa el cambio total de una relación de cambio. Este principio se puede aplicar a todas las relaciones de cambio en las ciencias naturales y sociales. Por ejemplo, Si  $V(t)$  es el volumen de agua en un depósito, en el instante  $t$ , entonces su derivada es la proporción a la cual fluye el agua hacia el depósito en el instante  $t$ . Por eso,

$$\int_{t_1}^{t_2} V'(t) = V(t_2) - V(t_1)$$

es el cambio en la cantidad de agua en el depósito entre los instantes  $t_1$  y  $t_2$ .

A partir, del estudio de estos dos problemas, Newton expresó que están estrechamente relacionados, de manera que, para obtener la integral o área bajo una curva o función, se debe hallar la función cuya derivada sea la función inicial. Esto unido a la generalización que obtiene para exponentes fraccionarios y negativos de su famoso binomio, le permitirá fácilmente obtener con generalidad las cuadraturas de todas las funciones algebraicas que se conocían ( Montesinos , 2009) . Sin embargo, Newton siendo un conocedor del gran aporte de los sistemas cartesianos al estudio de la geometría y el álgebra, logra conectar estos conceptos matemáticos con situaciones propias de la física como la cinemática, rama de la física que estudia el movimiento de los cuerpos sólidos sin analizar las causas que lo originan. Por esta razón, se afirma que Newton a diferencia de Leibniz, utiliza estos nuevos conceptos en la resolución de problemas físicos, dando origen a lo que se conoce como el enfoque newtoniano, donde el estudio de la naturaleza parte de la observación de fenómenos físicos que se apoyan en las ideas y leyes matemáticas como es el caso del cálculo diferencial e integral, nombre con el que se conoce hoy en día la teoría de fluxiones; dicho nombre se refiere a la forma en la que una cantidad (la ordenada) aumenta o disminuye según cambie otra cantidad con la que está relacionada (la abscisa), desde esta perspectiva las cantidades fluyen . A estas cantidades que fluían, Newton las llamó *fluentes* y a sus velocidades de cambio, a sus variaciones instantáneas con respecto al tiempo, las llamó fluxiones ( Montesinos , 2009).

### 1.2.3. Las fluxiones y notación

De acuerdo con, Lozano (2011), Newton en el libro “Methodus Fluxionum et Serierum Infinitorum” que fue escrito en 1671 y publicado en 1736, Incluyó el método de fluxiones en la paginas 390–396 de su Algebra. Newton concibe las cantidades matemáticas como el movimiento continuo de un punto que traza una curva. Cada una de estas cantidades variables que aparecen  $x, y, \dots$ , las llama “fluentes” y sus velocidades, designadas por:

$$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dots$$

Las llama “fluxiones”. La parte infinitesimal pequeña en la que un fluente se incrementa por unidad infinitesimal de tiempo  $0$ , es  $x_0$  el momento del fluente. El problema fundamental es, dada una relación entre fluentes hallar la relación entre sus fluxiones, y recíprocamente, dada una relación entre fluxiones hallar la correspondiente relación entre fluentes ( Lozano Y. , 2011).

La relación entre fluxiones a partir de los fluentes se puede hallar si suponemos  $y = f(x)$  es un pequeño intervalo o de tiempo  $x$  se incrementa  $A(x + x_0)$  y se incrementa a:  $y + \dot{y}_0$  y al ser  $y + \dot{y}_0 = f(x + \dot{x}_0)$  será

$$\dot{y} = \frac{f(x + \dot{x}_0) - f(x)}{0}$$

Al ser  $0$  infinitamente pequeño se cancelan los términos que contienen  $0$  y aparece la relación entre fluxiones buscada.

Por ejemplo, para  $y = x^3$  se tiene:

$$\dot{y} = \frac{(x + \dot{x}_0)^3 - x^3}{0} = \frac{x^3 + 3x^2\dot{x}_0 + 3x0^2\dot{x}_0^2 + 0^3\dot{x}_0^3 - x^3}{0} = \frac{3x^2\dot{x}_0 + 3x0^2\dot{x}_0^2 + 0^3\dot{x}_0^3}{0}$$

Se elimina el cero del denominador

$$y = 3x^2\dot{x}_0 + 3x0^2\dot{x}_0^2 + 0^3\dot{x}_0^3$$

Luego se eliminan los términos que tienen  $0$  ya que se le supone infinitamente pequeño quedando:  $\dot{y} = 3x^2\dot{x}$  y por lo tanto la relación entre fluxiones es:  $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 3x^2$ .

### 1.2.4. Definición de la derivada en física

En la mayoría de textos de física se habla de velocidad promedio y velocidad instantánea para estudiar el movimiento rectilíneo uniforme, lo que lleva a los profesores a presentar las diferencias y similitudes

entre estos dos conceptos. Por un lado se sabe que la velocidad media o promedio es “una cantidad vectorial cuya componente  $x$  es el cambio en  $x$  dividido entre el intervalo de tiempo” (Hugh & Freedman , 2013, pág. 36). Expresado matemáticamente equivale a

$$v_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_1 - t_2}$$

Es decir que para conocer la velocidad media de una partícula es necesario identificar la naturaleza del desplazamiento y el intervalo de tiempo que dura el movimiento. Es importante resaltar que la velocidad es una magnitud vectorial ya que el desplazamiento es un vector que va dirigido de un punto inicial a otro final.

**Sin embargo, Hugh y Freedman (2013) consideran que:**

la velocidad media de una partícula durante un intervalo de tiempo no nos indica la rapidez, o la dirección, con que la partícula se estaba moviendo en un instante determinado del intervalo. Para describir esto, necesitamos conocer la velocidad instantánea, es decir, la velocidad en un instante específico o en un punto específico de la trayectoria. (pág. 38)

Esto requiere de una revisión de la definición de velocidad desde el punto de vista del cálculo diferencial dado que los mismos autores afirman que “La velocidad instantánea es el límite de la velocidad media conforme el intervalo de tiempo se acerca a cero; es igual a la tasa instantánea de cambio de posición con el tiempo (Hugh & Freedman , 2013, pág. 39). Lo cual se refiere nada más y nada menos que a la derivada del desplazamiento con respecto al tiempo.

En el lenguaje del cálculo se puede escribir la velocidad instantánea como:

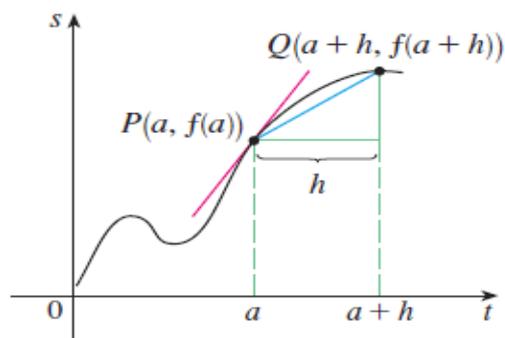
$$v(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Donde  $s$  es el desplazamiento del objeto respecto al origen, en el tiempo  $t$ , y se escribe como  $s = f(t)$ .

La función  $f$  que describe el movimiento se conoce como función de posición del objeto. Es decir que en el tiempo  $t = a$  hasta  $t = a + h$ , el cambio en la posición es  $f(a+h) - f(a)$  (Stewart, 2013).

La figura 1, permite visualizar mejor la definición de velocidad instantánea:

**Figura 1.** Definición de velocidad instantánea



*Nota:* tomado del libro de texto cálculo de una variable, Stewart (2013).

En otras palabras, esto significa que la velocidad en el instante  $t = a$  es igual a la pendiente de la recta tangente en el punto  $P$ .

### 1.2.5. Enfoque variacional

En el primer caso se propone remover el discurso matemático escolar desde el fondo, cambiando el papel principal que los cursos de cálculo confieren al concepto de límite y poniendo en su lugar a la variación física, de tal manera que no se sugiere tratar tan exhaustivamente las funciones, sino más bien las cantidades y las magnitudes. Al concretar estas ideas, se parte de las razones de cambio promedio obtenidas del estudio de fenómenos de la vida diaria y se arriba a la derivada como razón de cambio instantánea por medio de un manejo intuitivo del límite.

## 2. METODOLOGÍA

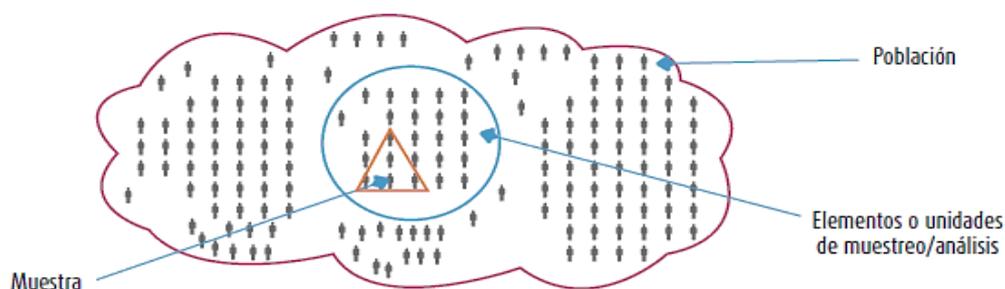
El marco metodológico se estructuró de tal manera que al finalizar la intervención se logró dar respuesta a la pregunta de investigación y concluir sobre los objetivos propuestos para ésta; siempre partiendo de los organizadores del currículo planteados por el ministerio de educación nacional, a través, de los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencias en matemáticas.

La presente investigación tiene un enfoque de acción-participación con alcance descriptivo, permitiendo obtener resultados medibles que favorecen la reflexión y el análisis de los aprendizajes, además porque de acuerdo con el enfoque, el investigador puede a su vez ser investigado y quienes son investigados pueden ser investigadores aportando todos a la transformación de su realidad, ya que, “las personas que participan, independientemente de su grado de educación y posición social, contribuyen en forma activa al proceso de investigación” (Balcazar, 2003, pág. 60). El énfasis es registrar la mayor cantidad de

información que contribuya a la solución del problema planteado.

El tipo de muestra que se eligió para la investigación fue la muestra de participantes voluntarios ya que en estos casos, la elección de los participantes depende de circunstancias muy variadas (Hernández, Collado, & Baptista, 2014), como sucedió con algunos estudiantes de la institución educativa que se encontraban realizando servicio social o no contaban con los recursos socioeconómicos para asistir en contra jornada, como fue el caso del desarrollo de la actividad macro llevada a cabo en las instalaciones del laboratorio de la universidad de la Amazonia.

**Figura 2.** Representación de una muestra



*Fuente:* Hernández, Collado, & Baptista, (2014)

La muestra para esta investigación son los estudiantes de grado undécimo de la institución educativa Antonio Ricaurte de la ciudad de Florencia-Caquetá. Esta muestra la conforman 17 estudiantes del grado once cinco (11-05) de la jornada mañana.

**Tabla 1.** Detalle de la muestra

Grado	Edad				Total
Undécimo	15	16	17	18	
Total	1	9	5	2	17

*Nota.* Elaboración propia (2023)

La técnica utilizada fue la encuesta para obtención de datos y realizar la caracterización socio familiar para determinar la situación y disponibilidad que tienen los jóvenes frente al tema de investigación. Como instrumento, se utiliza una ficha técnica donde los estudiantes deben escribir información relacionada con datos básicos de identificación de su contexto familiar. Las respuestas obtenidas luego de aplicar la encuesta fueron graficadas y procesadas mediante la ayuda de la hoja de cálculo Microsoft Excel para el posterior análisis.

De igual manera, para la fase de diagnóstico se utilizó como instrumento el cuestionario, con el fin de obtener información concerniente a los conocimientos previos de los estudiantes y realizar un análisis descriptivo sobre las fortalezas y debilidades. Para la caracterización del diagnóstico sobre la interpretación del “significado de la derivada desde el enfoque Newtoniano” se toma como modelo algunas de las situaciones o preguntas propuestas por la prueba saber 11 realizada por el instituto colombiano para la evaluación de la educación (ICFES) en diferentes años. Estas situaciones se construyen a partir del modelo basado en evidencia, presentando algunas ventajas, “las cuales giran en torno, a la validez de las inferencias que concluyen afirmaciones sustantivas sobre lo que los estudiantes saben o pueden hacer en la vida cotidiana, a partir de la puntuación que obtienen en una prueba” (ICFES, 2023).

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la caracterización socio familiar y el diagnóstico, se procedió a diseñar una guía didáctica fundamentada en la experimentación, la cual consiste en dar respuesta a diez (10) preguntas, a partir de la observación y registro de evidencia. La práctica está basada en el estudio y análisis sobre el comportamiento del agua en un contenedor o control de volumen (ver figura 3) cuando este tiene dos llaves, una de entrada y otra de salida, además se hacen manipulaciones de ambas llaves. Cuando se determinó la herramienta de la actividad macro de la investigación, fue importante que el equipo investigador se reuniera para diseñarla, ponerla en funcionamiento y de esta manera presentarla en óptimas condiciones a los estudiantes para minimizar riesgos de fracaso.

**Característica del contenedor:**

Altura: 62,5 cm

Altura del nivel del volumen inicial:  
23,5 cm

Diámetro: 8,41 cm

Radio: 4,205 cm

Capacidad del contenedor: 3,471 L

Volumen inicial: 1,305 L

**Materiales:**

1. Contenedor o control de volumen
2. Manguera de tres metros
3. Dos llaves de paso
4. Corcho
5. Agua

**Figura 3.** *Contenedor o control de volumen*



*Nota.* Elaboración propia

Una vez diseñada la actividad macro (estrategia didáctica) y la herramienta (contenedor), se visitó de nuevo la Institución educativa Antonio Ricaurte para la socialización de la actividad a los estudiantes, quienes fueron invitados a la Universidad de la Amazonia en horas de la tarde en el laboratorio de física.

### **3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN**

La información obtenida a través de las técnicas mencionadas anteriormente, se sometió a un análisis estadístico descriptivo e inferencial en el cual se obtuvieron los resultados expuestos a continuación:

En la figura 4, se muestra los resultados arrojados por el instrumento de caracterización socio familiar.

En la investigación, el género del grupo de trabajo participante del grado once cinco, en su mayoría son hombres con un porcentaje de 63%, mientras que el 37% son mujeres. Así mismo, la edad típica de los estudiantes del grupo de trabajo es de 16 años con una representación del 47%, que es la edad hacia la que está dirigida la educación media (10° y 11°) en Colombia (OCDE, 2016). Luego, sigue el 29% que corresponde a los estudiantes con 17 años de edad. Solo el 18% de los estudiantes son mayores de edad. Mientras que, en este caso, la edad atípica fue de 15 años con un (1) solo estudiante, el cual representaba tan solo el 6% de la muestra de estudio.

De los 17 estudiantes, el 84% portaba como documento de identidad, la tarjeta de identidad, solo el 16% tenía cédula al momento de participar en la investigación.

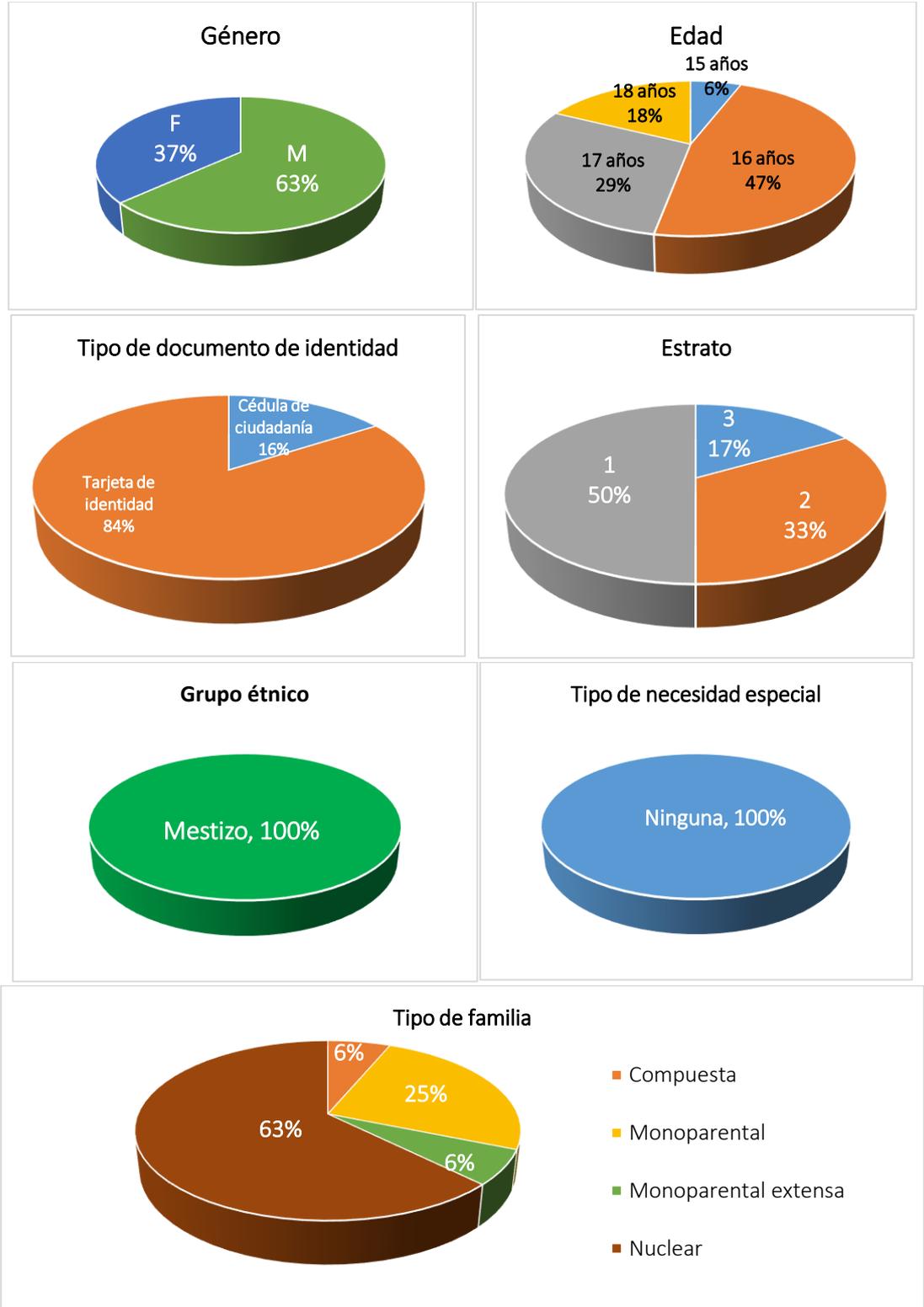
Con respecto al estrato social, el 50% de los jóvenes pertenecen al estrato 1, el cual corresponde a las personas con menores recursos, los cuales son beneficiarios de subsidios en los servicios públicos domiciliarios y demás dispuestos por el gobierno nacional. Por otro lado, le sigue el estrato 2 con una representación porcentual del 33% y 17% para el estrato 2.

De igual manera, el 100% de los jóvenes no tienen necesidades especiales y pertenecen al mismo grupo étnico de mestizos, por lo que, desde la perspectiva étnica, la investigación se desarrolla con personas con costumbres e ideas similares, donde los gustos en su mayoría son compartidos.

En la figura 4, se presenta que la mayoría del alumnado (63%) se desenvuelve en familias *nucleares*, conformadas por padre, madre e hijos. Consecutivamente se halla la *monoparental*, en la cual habita la madre o padre soltero con hijos con el (25%), así mismo existe la *monoparental extendida* (6%), en la que a diferencia de la antes mencionada viven con otros familiares. Finalmente se localiza la *compuesta* (6%), la cual está conformada por la familia del alumno más otra familia, que entre sí no están unidas por

vínculos consanguíneos, sin embargo la cohabitación los lleva a compartir relaciones y procesos de la dinámica interna propia de la familia (Martínez , Torres , & Ríos , 2020).

**Figura 4.** Caracterización socio familiar de los estudiantes



Fuente. Construcción propia, a partir de los resultados de la aplicación de la encuesta a estudiantes del grado 11-05.

Desde esta perspectiva, y de acuerdo con los datos que se presentan en la figura 4, se puede inferir que, la mayoría del alumnado se encuentra en un clima de óptimas condiciones familiares, y en segundo lugar en un clima bueno. Según, Martínez , Torres , & Ríos (2020), esto permite al estudiante, “ tener más facilidades de lograr el éxito escolar” (pág. 08).

De la misma forma, una vez aplicado, revisado y analizado los resultados del cuestionario socio-familiar, se procedió a procesar los resultados del instrumento diagnóstico, en el cual se indago sobre las ideas y conocimientos previos relacionados con saberes de la cinemática. La tabla 2, presenta los resultados obtenidos.

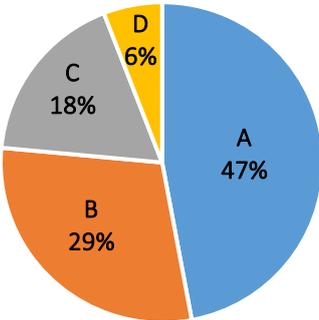
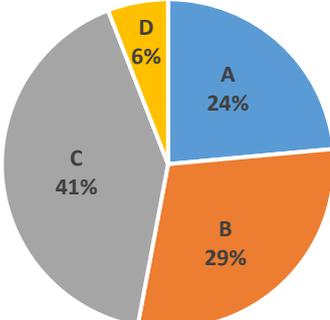
De acuerdo con los resultados de la pregunta 1, solo el 29% de los estudiantes responden correctamente, lo que quiere decir que el 71% del alumnado no tiene claridad sobre el concepto de desplazamiento. Al tomar la opción A, escogida por el 47%, o C, escogida por el 18% de la muestra, se puede afirmar que la mayoría de los jóvenes no identifican el concepto de cambio en una magnitud física como es la posición que ocupa un cuerpo en el espacio, siendo este un obstáculo en el desarrollo de las nociones de variación que son fundamentales en la epistemología de la derivada (Parra & Cordero, 2007). De igual manera, se observa una gran dispersión en las respuestas dadas a la pregunta 2, dado que todas las opciones de respuestas fueron seleccionadas por los estudiantes, la opción correcta tiene una representación del 41% que corresponde a la opción C, seguida del 29% correspondiente a la opción B, lo cual deja en evidencia que parte de la muestra no tiene claridad sobre el concepto de trayectoria y medida de la trayectoria. Para la pregunta 3, el 53% de la muestra, responde incorrectamente eligiendo la opción A, lo cual presupone que se desconoce por parte del grupo la relación entre magnitudes y su variación de acuerdo a su dependencia; respecto a esto, Parra & Cordero (2008), mencionan que, “aspectos relacionados con el movimiento o variacionales, medulares en la epistemología de la derivada no forman parte del conocimiento que el estudiante le incorpora, ya que no son usados en el discurso de los profesores al enseñar ese tema”.

Por otra parte, en la pregunta 4, la mayor parte del alumnado con el 71% eligieron las opciones incorrectas, evidenciándose una vez más la dificultad en ellos para interpretar y extraer información explícita de graficas o planos y la falta de comprensión de las cantidades solicitadas, pues tan solo el 29% respondieron acertadamente. Esto indica, que el estudiante presenta dificultades para “observar y

describir la variación de graficas cartesianas que representan relaciones entre dos variables” (MEN, 2015). De la misma forma, en la pregunta 5, los alumnos presentan una dispersión en las opciones elegidas ya que todas las opciones fueron seleccionadas por la muestra, sin embargo, la opción D tuvo una mayor representación porcentual con un 41%, frente a la opción B con el 35%, la cual es la opción correcta para esta pregunta; de esta manera, se entiende que los estudiantes no tienen presente la definición de velocidad promedio y también presentan dificultad para leer la información relacionada en la gráfica.

Finalmente, en la pregunta 6, solo el 24% identificó el espacio recorrido por la esfera, es decir que adicionó las longitudes recorridas por la esfera durante los primeros 5 segundos. En la elección de la opción A se intuye que el 23% de los alumnos usaron la definición de desplazamiento, pues consideran que la esfera al volver al punto de partida no realizó ningún desplazamiento. Así mismo, el 53% restante, no tiene claro lo que se le preguntó.

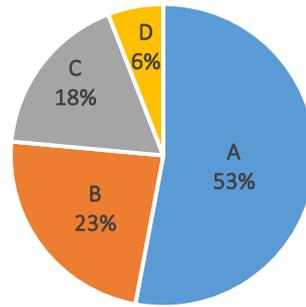
**Tabla 2.** Resultados de instrumento diagnóstico

<p><b>Pregunta 1:</b></p> <p>De los siguientes términos, la expresión “<b>cambio de posición de un cuerpo</b>” corresponde a la definición de:</p> <p>A. Posición</p> <p>B. Desplazamiento</p> <p>C. Espacio recorrido</p> <p>D. Rapidez media</p>	 <table border="1"> <thead> <tr> <th>Opción</th> <th>Porcentaje</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A</td> <td>47%</td> </tr> <tr> <td>B</td> <td>29%</td> </tr> <tr> <td>C</td> <td>18%</td> </tr> <tr> <td>D</td> <td>6%</td> </tr> </tbody> </table>	Opción	Porcentaje	A	47%	B	29%	C	18%	D	6%
Opción	Porcentaje										
A	47%										
B	29%										
C	18%										
D	6%										
<p><b>Pregunta 2:</b></p> <p>La medida de la trayectoria que describe un cuerpo en movimiento es:</p> <p>A. Trayectoria</p> <p>B. Posición</p> <p>C. Espacio recorrido</p> <p>D. Rapidez media</p>	 <table border="1"> <thead> <tr> <th>Opción</th> <th>Porcentaje</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A</td> <td>24%</td> </tr> <tr> <td>B</td> <td>29%</td> </tr> <tr> <td>C</td> <td>41%</td> </tr> <tr> <td>D</td> <td>6%</td> </tr> </tbody> </table>	Opción	Porcentaje	A	24%	B	29%	C	41%	D	6%
Opción	Porcentaje										
A	24%										
B	29%										
C	41%										
D	6%										

**Pregunta 3:**

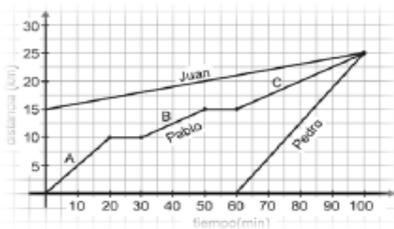
El espacio recorrido por un cuerpo en la unidad de tiempo se conoce como:

- A. Aceleración
- B. Velocidad media
- C. Rapidez media
- D. Trayectoria



**Pregunta 4:**

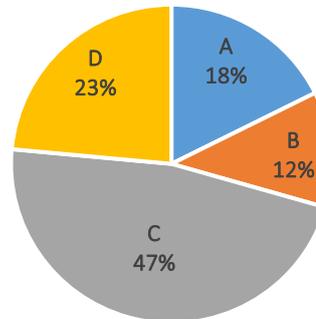
La gráfica muestra la distancia recorrida por Pedro, Pablo y Juan durante un entrenamiento de atletismo.



Gráfica

De la gráfica anterior se puede afirmar que:

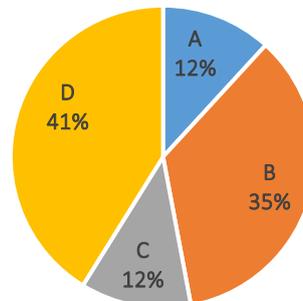
- A. los tres atletas recorrieron la misma distancia.
- B. los tres atletas estuvieron corriendo durante el mismo tiempo.
- C. Pablo recorrió más distancia que Pedro y que Juan.
- D. Pedro corrió durante menos tiempo que Juan y Pablo.



**Pregunta 5:**

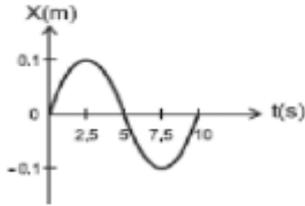
La velocidad promedio de Pablo durante el entrenamiento fue de:

- A. 0, 2 Km/min
- B. 0, 25 Km/min
- C. 0, 5 Km/min
- D. 1 Km/min



**Pregunta 6:**

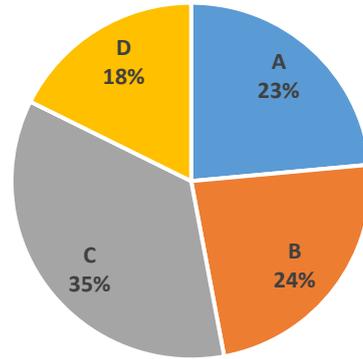
En la gráfica de la posición (x) como función del tiempo de una esfera que se mueve sobre una línea recta:



**Gráfica**

De la gráfica se concluye que la longitud total recorrida por la esfera entre  $t = 0$  y 5 segundos es:

- A. 0    B. 0.2 m    C. 0.1 m    D. 0.5 m

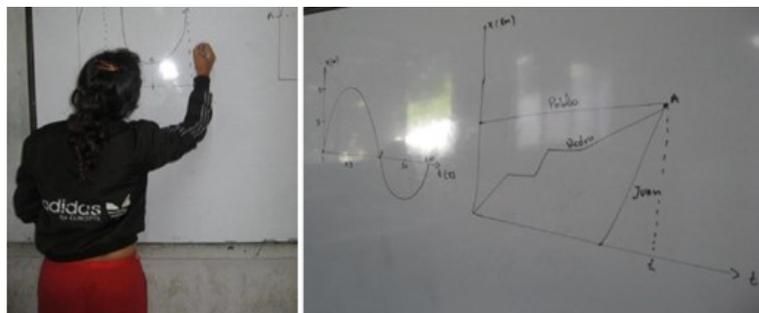


*Nota.* Elaboración propia a partir de los resultados obtenidos de la aplicación del instrumento diagnóstico a los estudiantes de 11-05.

En este orden de ideas, el procesamiento y análisis del instrumento diagnóstico permitió evidenciar las dificultades que presentan los estudiantes al momento de interpretar, analizar y extraer información de las gráficas, al igual que los cálculos necesarios para hallar el desplazamiento o velocidad promedio de las partículas.

Por esta razón, una vez analizado el diagnóstico, se procedió a visitar nuevamente la Institución Educativa Antonio Ricaurte y socializar las preguntas con los estudiantes. En esta fase se explicaron los conceptos físicos tratados en el instrumento y se aclararon las dudas e inquietudes.

**Figura 5.** Socialización de actividad diagnóstico



*Nota.* Elaboración propia a partir de los resultados obtenidos de la aplicación del instrumento diagnóstico a los estudiantes de 11-05.

De igual forma se socializó con los estudiantes la actividad macro (estrategia didáctica) y se invitaron a la universidad de la amazonia para desarrollar dicha actividad en las instalaciones del laboratorio de física.

Para finalizar la intervención en el aula, se aplicó la estrategia didáctica, la cual se condensó en la Guía “Significado de la derivada desde el enfoque newtoniano” (figura 5), la cual se materializó, a través de un contenedor hermético o volumen de control como el que se muestra en la figura 3, y desde allí los estudiantes realizaron todas las observaciones de la variación del comportamiento que tiene el volumen del agua al interior del dispositivo. Debían tener en cuenta que el dispositivo tenía dos llaves, una que permite la entrada de agua y otra que permite la salida, adicionalmente se manipulaban las dos llaves a diferentes ritmos. Para el desarrollo de la actividad, las instrucciones dadas fueron las siguientes: “*Si la llave de entrada se encuentra más abierta que la llave de salida y se empieza a cerrar de tal forma que quede más cerrada que la de salida y nuevamente se vuelva a abrir hasta superar a la llave de salida.*”

**Figura 6.** Instrumento de la Actividad macro

ACTIVIDAD	
<p>A continuación se presenta un contenedor o volumen de control (de agua) con una entrada y una salida, como se muestra a continuación:</p> <p><i>Si la llave de entrada se encuentra más abierta que la llave de salida y se empieza a cerrar de tal forma que quede más cerrada que la de salida y nuevamente se vuelva a abrir hasta superar a la llave de salida.</i></p> <p>De acuerdo al enunciado anterior analice y resuelva las siguientes preguntas:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. ¿Qué sucede en los tres momentos con el volumen de agua dentro del contenedor? Trazar las gráficas (que representen el registro de la cantidad de agua acumulada).</li> <li>2. ¿Qué características se tienen en cuenta para la construcción de las gráficas?</li> <li>3. ¿Cuándo hay acumulación (aumento) o agotamiento (disminución) del volumen de agua dentro del contenedor según las gráficas?</li> <li>4. ¿Qué condiciones se deben tener en cuenta, para saber cuándo hay acumulación o agotamiento en el volumen de agua de un instante a otro?</li> <li>5. ¿En qué momento no existe acumulación y agotamiento del volumen?</li> <li>6. ¿Qué representa la diferencia entre el volumen de agua que sale y el volumen de agua que entra? Represente esta diferencia en el contenedor.</li> <li>7. Si se abre totalmente la llave de entrada, ¿qué sucede con el volumen del agua?</li> <li>8. Si la llave de salida se abre pero sin superar el gasto de la llave de entrada, ¿qué sucede con el volumen?</li> <li>9. ¿Hasta dónde se puede decir que existe una acumulación de volumen del agua? Argumente su respuesta.</li> <li>10. ¿Hasta dónde se puede decir que existe un agotamiento de volumen del agua? Argumente su respuesta.</li> <li>11. ¿Qué se puede concluir de la actividad anterior?</li> </ol>	

*Nota.* Tomado y adaptado de Parra y Cordero (2008).

El propósito inicial de la actividad desarrollada es la de promover la construcción del significado de la derivada a través de situaciones alejadas de la forma tradicional de tal manera que se logre un aprendizaje significativo de este objeto matemático.

**Figura 7.** Desarrollo de la actividad macro

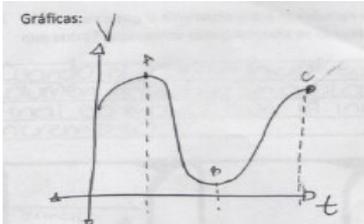
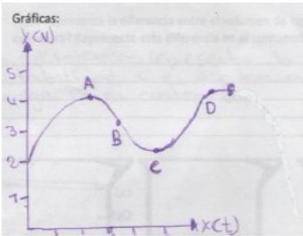


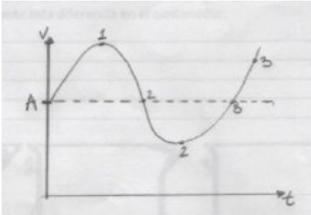
*Nota.* Elaboración propia. Solución de la actividad macro por parte de los estudiantes de 11-05.

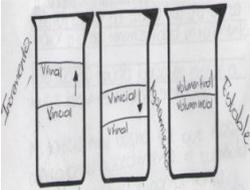
Para esta actividad las respuestas dadas por los equipos de trabajo se denotaron como EQ1, EQ2 y EQ3.

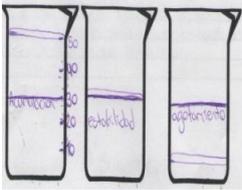
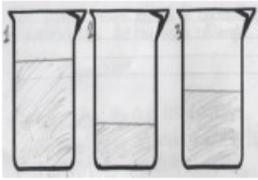
Los resultados obtenidos de la actividad macro (ver figura 7) se muestran a continuación:

**Tabla 3.** Resultados de la actividad macro (estrategia didáctica)

Pregunta	Respuestas	Análisis
<p>1. ¿Qué sucede en los tres momentos con el volumen de agua dentro del contenedor? ¿Trazar las gráficas (que representen el registro de la cantidad de agua acumulada)?</p>	<p><b>EQ1:</b> “Primer momento: hubo incremento en el volumen de agua. Segundo momento: hubo agotamiento del volumen de agua. Tercer momento: el volumen de agua incrementa lentamente.”</p>  <p><b>EQ2:</b> “En el primer momento en que se abre toda la llave se observa que el volumen del agua incrementa rápidamente. En el momento en que se va cerrando la llave el incremento del volumen comienza a disminuir, es más lento. Pero en el momento en que se gradúa la entrada del agua con la de salida ese volumen es estable, ya que la entrada y la salida del agua es igual, pero en cuanto se cierra totalmente la llave, comienza a disminuir rápidamente.”</p> 	<p>Los tres equipos representan mediante un sistema de coordenadas, el comportamiento del volumen de agua dentro del contenedor. Sin embargo, hay algunas diferencias y similitudes con las gráficas de cada uno, como ejemplo se tiene que, el equipo 1 a diferencia del 2 y 3, no establece un punto de partida para el volumen inicial (no escribe ningún rótulo) en el eje Y, solo atina a marcar los puntos donde hay incremento o agotamiento.</p> <p>Por otro lado, el equipo 2 desarrolla una escala para el volumen de agua (con <math>V_0=2</math>) sin presentar una justificación para ese valor, lo cual se infiere que fue escrito para cuantificar el comportamiento del volumen.</p> <p>Mientras que el equipo 3, enumera los momentos de incremento y agotamiento, trazando una línea que indica la variación del volumen con respecto a una cantidad de volumen inicial que ha rotulado con la letra A. Todo esto indica que, los estudiantes en esta fase de intervención, describen de manera gráfica la variación de una magnitud respecto a otra, como el volumen con el tiempo, lo cual</p>

	<p><b>EQ3:</b> “En el primer momento el volumen comienza a aumentar, en el segundo momento el incremento del agua es lento hasta que el punto que quede es estable y en el tercer momento el volumen del agua vuelve a aumentar lentamente hasta que aumenta rápidamente.”</p> 	<p>quiere decir que el estudiante comienza a presentar nociones de variación (Parra &amp; Cordero, 2007) a partir de conceptos físicos como la conservación de la masa, que se presenta desde un enfoque newtoniano.</p>
<p>2. ¿Qué características se tienen en cuenta para la construcción de las gráficas?</p>	<p><b>EQ1:</b> “El aumento, el agotamiento, tiempo y volumen inicial.”</p> <p><b>EQ2:</b> “El tiempo la presión que se ejerce a través de la llave según si está más abierta o más cerrada.”</p> <p><b>EQ3:</b> “El momento de acumulación y agotamiento del agua dentro del contenedor.”</p>	<p>Los equipos 1 y 3, argumentan en términos de la acumulación y agotamiento. Sin embargo, los equipos 1 y 2 mencionan como característica principal el tiempo transcurrido al igual que la cantidad de volumen de agua. Se logra evidenciar que han identificado las magnitudes que se deben relacionar a través de la gráfica, esta actividad acerca al estudiante hacia una matemática funcional que le permite validar sus argumentos y procedimientos, a partir de la generación de prácticas retóricas y argumentativas gráficas (Cordero, 2005b, citado en, Parra y Cordero, 2007).</p>
<p>3. ¿Cuándo hay acumulación (aumento) o agotamiento (disminución) del volumen de agua dentro del contenedor según las gráficas?</p>	<p><b>EQ1:</b> “Hay aumento cuando la llave de entrada está más abierta que la llave de salida. Hay disminución cuando la llave de entrada esta menos abierta que la llave de salida.”</p> <p><b>EQ2:</b> “Hay aumento cuando se abre la llave de entrada más que la de salida y agotamiento es cuando la llave se cierra y queda menos que el de salida.”</p> <p><b>EQ3:</b> “Hay aumento en los momentos uno y tres y agotamiento en el momento dos.”</p>	<p>Los tres equipos plantean situaciones idénticas, al observar el comportamiento de las llaves de ingreso y salida de agua, logran identificar cuando el volumen de agua empieza a subir y a bajar.</p> <p>Por otro lado, el equipo 3 es el único que especifica los momentos en los que ocurren el incremento y agotamiento del volumen de agua, aunque los tres equipos asocian el mayor volumen y menor volumen con la apertura y cierre de la llave respectivamente, lo cual va en concordancia con la noción de variación en las magnitudes.</p>

<p>4. ¿Qué condiciones se deben tener en cuenta, para saber cuándo hay acumulación o agotamiento en el volumen de agua de un instante a otro?</p>	<p><b>EQ1:</b> <i>“Para que cuando haya acumulación abrimos más fuerte la llave de entrada y para cuando haya agotamiento cerramos la llave de entrada completamente.”</i></p> <p><b>EQ2:</b> <i>“Tener un volumen constante para así saber si hay un incremento (acumulación) o disminución (agotamiento).”</i></p> <p><b>EQ3:</b> <i>“Pasa que haya acumulación o agotamiento del volumen de agua dentro del contenedor, se debe tener en cuenta el volumen saliente y entrante del agua.”</i></p>	<p>El análisis realizado por los equipos 2 y 3, parte de una observación más detallada de lo que sucede dentro del contenedor; mientras el equipo 1 hace referencia a la manipulación de las llaves. Es así que, las dos condiciones que se deben tener en cuenta para saber si existe acumulación o agotamiento del volumen de agua dentro del contenedor, es primero tener en cuenta un volumen inicial (equipo 2), además se requiere conocer el comportamiento de las llaves en el contenedor (abrir o cerrar gradualmente).</p> <p>El equipo 2, se acerca al concepto de incremento utilizado en la definición formal de la derivada, al considerar el cambio de una cantidad en incrementos infinitesimales. Por lo tanto, “existen otras formas con las cuales presentar el conocimiento y que han sido olvidados, que tienen sus propios fundamentos y su razón de ser, que posiblemente al ser implementados actualmente permitirían avances con respecto a la problemática que estamos viviendo en el proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática” (Parra &amp; Cordero, 2008).</p>
<p>5. ¿En qué momento no existe acumulación y agotamiento del volumen?</p>	<p><b>EQ1:</b> <i>“Cuando el caudal (agua) de la llave de entrada es igual a la de salida.”</i></p> <p><b>EQ2:</b> <i>“Al graduar la llave para que la cantidad de agua de entrada sea igual a la de salida y ahí el volumen de agua es estable”.</i></p> <p><b>EQ3:</b> <i>“Cuando el volumen del agua sea igual al de salida, estará estable y no habría agotamiento y acumulación”.</i></p>	<p>Sin tener en cuenta el volumen inicial se tomaron como referencia al comienzo, los tres equipos tienen respuestas similares, cuando el volumen de agua de entrada es igual al volumen de agua que sale, en ese instante no existe acumulación ni disminución en el volumen del agua. Logrando aproximarse a la noción de incremento cuando este tiende a cero.</p>
<p>6. ¿Qué representa la diferencia entre el volumen de agua que sale y el volumen de agua que entra? Represente esta</p>	<p><b>EQ1:</b> <i>“Cuando el volumen inicial es mayor que el volumen final hay un agotamiento y cuando el volumen final es mayor que el inicial hay un incremento.”</i></p> 	<p>Las respuestas de los equipos hacen mención de la diferencia entre volúmenes, sin embargo, la respuesta del equipo 3 alude al incremento como una cantidad mínima, sin suponer que están informando sobre la derivada desde un enfoque que es desconocido para ellos, pero totalmente válido para explicar el comportamiento de los fluidos, pues como</p>

<p>diferencia en el siguiente contenedor:</p>	<p><b>EQ2:</b> “La diferencia que representa la acumulación, la estabilidad y el agotamiento de agua que surge en el contenedor.”</p>  <p><b>EQ3:</b> “Representa mínimamente el incremento.”</p> 	<p>afirma, Parra y Cordero (2008): “se debe dar sentido a las gráficas de acumulación o agotamiento que corresponde a la derivada con base a dos estados: entrada y salida de flujo. De igual manera, es importante resaltar que actividades como estas distan del discurso matemático escolar, en donde, la graficación o la representación se consideran como una alternativa para dar sentido a procedimientos algebraicos y no a la reflexión que le permita al estudiante construir su propio conocimiento (Parra &amp; Cordero , 2008).</p>
<p>7. ¿Si se abre totalmente la llave de entrada, ¿qué sucede con el volumen del agua?</p>	<p><b>EQ1:</b> “Aumenta o incrementa, ya que, el volumen de la llave de entrada es mayor que el de la llave de salida.”</p> <p><b>EQ2:</b> “Lo que sucede con el volumen de agua es que aumenta hasta llegar a su nivel máximo.”</p> <p><b>EQ3:</b> “El volumen del agua aumenta rápidamente.”</p>	<p>En esta pregunta los equipos no tuvieron mayor dificultad, comprendieron rápidamente por medio de la práctica, que la acumulación en el volumen de agua aparece cuando el caudal de la llave de entrada es mayor al de la llave de salida. No obstante, emergen elementos relevantes en el análisis matemático como el valor máximo y aumento rápido; los cuales son cruciales para comprender fenómenos de la naturaleza que se modelan mediante funciones o se representan gráficamente. Por esta razón, Vrancken, Engler, y Mülle (2009), consideran que es “ necesario promover las tareas que conecten los distintos sistemas de representación porque de esta manera se logra que los alumnos favorezcan la visualización de las ideas y por ende los llevará a la aprehensión de dichos conceptos.</p>
<p>8. Si la llave de salida se abre, pero sin superar el gasto de la llave de entrada, ¿Qué sucede con el volumen?</p>	<p><b>EQ1:</b> “Vamos a ver un aumento lentamente”</p> <p><b>EQ2:</b> “Lo que pasa es que al no superar el agua de salida de la de entrada va a haber un aumento muy mínimo de agua.”</p> <p><b>EQ3:</b> “El volumen aumentara muy lentamente y no es notorio.”</p>	<p>Ya con esta pregunta los equipos logran cumplir el objetivo planteado, y es que ellos se dieran cuenta que la diferencia en el volumen de agua en esta situación era mucho menor a las observada al comienzo de la práctica.</p>

<p>9. ¿Hasta dónde se puede decir que existe una acumulación de volumen del agua? Argumente su respuesta.</p>	<p><b>EQ1:</b> “<i>Se puede decir que cuando la llave de entrada supera a la llave de salida.</i>”</p> <p><b>EQ2:</b> “<i>Hay una acumulación de agua en el contenedor hasta que la llave de entrada se gradúa con la de salida, para que en el contenedor halla una estabilidad.</i>”</p> <p><b>EQ3:</b> “<i>Hasta que el contenedor este totalmente lleno y el agua se bote.</i>”</p>	<p>Los equipos 2 y 3 no lograron establecer hasta cuándo podría decirse que existe una acumulación en el volumen de agua, plantearon argumentos muy someros acerca de esta situación, solamente el equipo 1, logró una aproximación, pero no significativa, plantea que si se quiere lograr una acumulación la llave de entrada debe superar la llave de salida de volumen de agua, con esta pregunta se pretende aproximar al estudiante a la noción de limite.</p>
<p>10. ¿Hasta dónde se puede decir que existe un agotamiento de volumen del agua? Argumente su respuesta.</p>	<p><b>EQ1:</b> “<i>Cuando el volumen de la llave de entrada es menor que el de la llave de salida o cuando la llave de entrada se cierra completamente.</i>”</p> <p><b>EQ2:</b> “<i>solo cuando el volumen de agua de la llave de entrada es menor que el volumen de agua de la llave de salida</i>”</p> <p><b>EQ3:</b> “<i>Hasta que el volumen del agua del contenedor empieza a disminuir llega a un punto que quede seco el contenedor.</i>”</p>	<p>Solo el equipo 2, plantea una condición para que exista agotamiento, pero no establece la frontera mínima para que continúe el agotamiento, es decir, establecer el incremento de volumen final para que aun haya agotamiento en el volumen de agua dentro del contenedor.</p>

*Nota.* Elaboración propia a partir de los resultados obtenidos del desarrollo de la actividad macro por parte de los estudiantes de 11-05.

#### 4. CONCLUSIONES

El desarrollo de prácticas pedagógicas como el seminario alemán de profundización *una mirada más profunda al cálculo diferencial e integral*, promueven espacios de discusión y socialización de conocimientos en los que emergen ideas de investigación que contribuyen a la resignificación de conceptos epistemológicos como la derivada, el cual se abordó en este trabajo con un enfoque newtoniano distante de los formalismos y algoritmos propios del discurso escolar, favoreciendo el aprendizaje del cálculo en los estudiantes de la educación media.

Por otro lado, el contexto socio-familiar juega un papel determinante en los procesos de investigación como el tratado aquí, ya que los alumnos participantes mostraron una actitud receptora y desde la perspectiva familiar, la mayoría de los jóvenes provenían de ambientes familiares óptimos que apoyaron

el desarrollo de las diferentes actividades. No obstante, no se evidenció correlación alguna entre el contexto familiar y el desempeño académico de los estudiantes en la actividad diagnóstica, ya que se pudo identificar algunas dificultades referentes a las nociones de cinemática donde la variación y relación entre magnitudes son conceptos propios del enfoque newtoniano en el que se desenvuelve el objeto matemático de la derivada.

En este mismo sentido, conviene resaltar que la implementación de estrategias didácticas apoyadas en actividades experimentales sobre el estudio de la derivada con enfoque físico, permite generar ambientes de interacción, donde al estudiante se le permite participar en la construcción de su propio conocimiento, además de reflexionar sobre la importancia de las matemáticas en contextos o escenarios cotidianos como observar el flujo de los fluidos en la naturaleza.

Finalmente, se sugiere para futuras investigaciones, tener en cuenta las ventajas de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC's) en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, para pasar a una etapa de construcción y adecuación de la experiencia por medio de simuladores donde se pueda controlar y mejorar el análisis gráfico de los resultados y así favorecer significativamente la construcción del significado de la derivada desde otros enfoques.

## 5. REFERENCIAS

- Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1(1), 40-55. Obtenido de <https://www.redalyc.org/pdf/335/33510104.pdf>
- Balcazar, F. (2003). Investigación acción participativa (iap): Aspectos conceptuales y dificultades de implementación. *Revista fundamentos en humanidades*, vol. IV( 7-8 ), 59-77. Obtenido de <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=18400804>
- Furió, C. (1994). Tendencias actuales en la formación del profesorado de ciencias. *Revista enseñanza de las ciencias*, 12(2), 188-199. Obtenido de <https://core.ac.uk/download/pdf/13273442.pdf>
- Hugh, Y., & Freedman, R. (2013). *Física universitaria* (Décimo tercera ed., Vol. Uno). México, DF: Pearson.

- Hernández , R., Collado, C., & Baptista , M. (2014). *Metodología de la investigación* (6 Ed ed.). México D.F: McGraw-Hill. Obtenido de <https://www.uca.ac.cr/wp-content/uploads/2017/10/Investigacion.pdf>
- ICFES. (16 de Marzo de 2023). *Guía introductoria al diseño centrado en evidencias*. Obtenido de Icfes Interactivo: <https://www.icfes.gov.co/documents/39286/14030789/1.+Guia+introdutoria+al+Dise%C3%B1o+Centrado+en+Evidencias.pdf>
- Llancaqueo, A., Caballero, M., & Moreira, M. (2003). El Aprendizaje del Concepto de Campo en Física: una Investigación Exploratoria a Luz de la Teoría de Vergnaud. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 5(4), 399-417. Obtenido de <https://www.scielo.br/j/rbef/a/VwdSZhjXvkd4btrhv3QJsQR/abstract/?lang=es>
- Lozano , Y. (2011). *Desarrollo del concepto de la derivada sin la noción del límite*. Bogotá: Trabajo de Grado para Optar por el Título de Matemático. Obtenido de [http://www.konradlorenz.edu.co/images/stories/articulos/DESARROLLO\\_DE\\_LA\\_DERIVADA\\_SIN\\_LA%20NOCION\\_DEL\\_LIMITE.pdf](http://www.konradlorenz.edu.co/images/stories/articulos/DESARROLLO_DE_LA_DERIVADA_SIN_LA%20NOCION_DEL_LIMITE.pdf)
- Lozano , Y. (2011). *Desarrollo del concepto de la derivada sin la noción del límite*. Bogotá: Fundación Universitaria Konrad Lorenz. Obtenido de [https://www.academia.edu/26865733/DESARROLLO\\_DEL\\_CONCEPTO\\_DE\\_LA\\_DERIVADA\\_SIN\\_LA\\_NOCI%C3%93N\\_DEL\\_L%C3%8DMITE](https://www.academia.edu/26865733/DESARROLLO_DEL_CONCEPTO_DE_LA_DERIVADA_SIN_LA_NOCI%C3%93N_DEL_L%C3%8DMITE)
- Martínez , G., Torres , M., & Ríos , V. (2020). El contexto familiar y su vinculación con el rendimiento académico. *Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, 11, 1-17. Obtenido de <https://www.redalyc.org/journal/5216/521662150008/html/>
- MEN. (2015). *Matriz de referencia. Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de educación nacional.
- Montesinos , J. (2009). FLUXIONES, INFINITESIMALES Y FUERZAS VIVAS. Un panorama leibniziano. *Thémata. Revista de filosofía*(42), 77-106. Obtenido de [file:///C:/Users/USER/Downloads/550-Texto%20del%20art%C3%ADculo-2126-1-10-20150407%20\(1\).pdf](file:///C:/Users/USER/Downloads/550-Texto%20del%20art%C3%ADculo-2126-1-10-20150407%20(1).pdf)
- OCDE. (2016). *La educación en Colombia. Revisión de políticas nacionales*. París, Francia: Oede.

- Parra , T., & Cordero , F. (2008). La derivada como razón de acumulación o agotamiento. *ICME, 11 congreso internacional de educación matemática*, 1-8. Obtenido de <http://funes.uniandes.edu.co/4955/>
- Parra, T., & Cordero, F. (2007). El uso de las gráficas en la mecánica de fluidos. El caso de la derivada. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 20, 525-530. Obtenido de <http://funes.uniandes.edu.co/5376/>
- Parra, T., & Cordero, F. (2009). La derivada como razón de acumulación o agotamiento. *Comité Latinoamericano de Matemática educativa A.C*, 711-718. Obtenido de <http://funes.uniandes.edu.co/4955/1/CorderoLaderivadaAlme2009.pdf>
- Pérez , J. (2010). El seminario alemán una estrategia pedagógica para el estudiante. *Revista Cultura, Educación y Sociedad*, 1(1), 107-112. Obtenido de [https://www.academia.edu/35734781/El\\_seminario\\_alem%C3%A1n\\_una\\_estrategia\\_pedag%C3%B3gica\\_para\\_el\\_estudiante\\_The\\_german\\_seminar\\_a\\_pedagogic\\_strategy\\_for\\_the\\_student](https://www.academia.edu/35734781/El_seminario_alem%C3%A1n_una_estrategia_pedag%C3%B3gica_para_el_estudiante_The_german_seminar_a_pedagogic_strategy_for_the_student)
- Stewart, J. (2013). *Cálculo de una variable* (Séptima edición ed.). México, D.F.: CENGAGE Learning.
- Vaccarezza , G., Oliva , K., Pérez , C., & Reyes , F. (2017). Seminario Alemán: una experiencia de aprendizaje y enseñanza de la argumentación. En *Innovando en Educación Superior: Experiencias clave en Latinoamérica y el Caribe 2016-2017* (Vol. Volumen 2: metodologías activas de enseñanza y aprendizaje, págs. 217-228). Santiago de Chile: Universidad de Chile, Facultad de Economía y Negocios. Obtenido de <https://libros.uchile.cl/712>
- Vrancken, S., Engler, A., & Müller , D. (2009). Una propuesta para la introducción del concepto de derivada. *Actas De La VII Conferencia Argentina De Educación Matemática* (págs. 129-138). Buenos Aires, Argentina: Soarem.