

Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de pedagogía de las matemáticas y la física

Jorge Santiago Tocto Maldonado¹

jorge.s.tocto@unl.edu.ec

<https://orcid.org/0000-0002-0455-9333>

Universidad Nacional de Loja
Ecuador

Jorge Vivanco-Román

jvvivancor@unl.edu.ec

<https://orcid.org/0000-0003-0887-2148>

Universidad Nacional de Loja
Ecuador

Iván Agustín Quizhpe Uchuari

ivan.quizhpe@unl.edu.ec

<https://orcid.org/0000-0002-9296-9449>

Universidad Nacional de Loja
Ecuador

RESUMEN

La presente investigación tuvo como objetivo determinar la existencia de problemas en los estudiantes al momento de relacionar las representaciones gráficas y algebraicas para funciones de variable real, para lo cual se utilizó un diseño de investigación descriptiva con enfoque mixto. La población de estudio fueron 49 estudiantes del primer año de la Carrera de Pedagogía de las Matemáticas y la Física: el instrumento para la recolección fue el cuestionario y como técnica la encuesta. Asimismo, el resultado de la investigación es que existen dificultades en la comprensión del concepto de función, específicamente en el paso de la forma algebraica a la gráfica, se concluye que al trabajar con funciones racionales que se definen únicamente para cierto campo de los números reales existen limitaciones por parte de los estudiantes al momento de relacionar las representación algebraica con la gráfica y en la manipulación de elementos característicos como son dominio y rango.

Palabras clave: *función; representación gráfica; representación algebraica; matemática.*

¹ Autor Principal

Learning difficulties in the concept of function in mathematic and physic students

ABSTRACT

The present research aimed to determine the existence of problems in students when relating graphical and algebraic representations for real variable functions, for which a descriptive research design with a mixed approach was used. The study population consisted of 49 first-year students in the Mathematics and Physics Education program. The questionnaire was used as the data collection instrument and the survey as the technique. Likewise, the result of the research is that there are difficulties in understanding the concept of function, specifically in the transition from the algebraic form to the graphical representation. It is concluded that when working with rational functions that are defined only for a certain field of real numbers, there are limitations on the part of students when relating the algebraic representation with the graphical representation and in the manipulation of characteristic elements such as domain and range.

Keywords: *function; graphical representation; algebraic representation; mathematics.*

Artículo recibido 01 abril 2023

Aceptado para publicación: 15 abril 2023

INTRODUCCIÓN

La carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales Matemáticas y la Física se caracteriza por la formación de estudiantes que aplican con actitud crítica y creativa los principios de la lógica matemática, geometría, trigonometría, álgebra, cálculo, estadística, entre otras disciplinas ubicadas en el campo de estudio de las matemáticas y que dentro de sus requisitos de ingreso manifiesta que sus aspirantes deben contar con habilidades de razonamiento abstracto y físico, ser analíticos, disciplinados, colaboradores y perseverantes.

La inclusión de la Matemática en el currículo de esta carrera responde de manera natural, al modelo del profesional que se pretende formar. La asignatura Álgebra de Funciones y su Didáctica corresponde al contenido matemático que se imparte en el segundo ciclo a los estudiantes que cursan el primer año de Pedagogía de las Matemáticas y Física y se ubica en la unidad de organización curricular básica. El curso consta de 160 horas y en él se abordan tópicos referentes al estudio de funciones de una sola variable real.

Esta asignatura tiene un carácter fundamental y reviste una enorme importancia para la formación del futuro docente en Pedagogía de las Matemáticas y la Física, dado que se toma como eje transversal en varios cursos de la licenciatura. En este sentido, es importante el criterio de Stewart (2012) quien pondera a las funciones como objetos fundamentales con los que trata el Cálculo y la Matemática, a la vez destaca las representaciones verbal, numérica, visual o gráfica, algebraica que tiene el concepto y las interrelaciones existentes entre ellas.

Desde la experiencia docente con los estudiantes del primer año de la licenciatura (ciclos I y II), se ha podido determinar que existen problemas al momento de vincular los diferentes contextos que tiene un mismo objeto matemático; particularmente cuando se trabaja con funciones y sus representaciones (registros) algebraicas y gráficas; por lo que se presentan diversos inconvenientes al momento de realizar su respectivo análisis, es así que se puede plantear el siguiente problema de investigación ¿Existe problemas en los estudiantes para relacionar las representaciones gráficas y algebraicas para funciones de variable real?

Dicho problema se pudo corroborar con el test aplicado en el que se recolectó la información referente al cambio de registro entre el gráfico al algebraico y viceversa. Los resultados obtenidos se pueden

sinetizar en que los estudiantes identifican como una gráfica única, dos funciones que se consideran equivalentes y no toman en cuenta los valores para los cuales la función no se define, entre otros resultados evidentes que se presentan en la sección correspondiente y que se corroboran con la teoría de estudio pertinente propuesta por Duval (1996).

Las dificultades del aprendizaje y de la relación existente entre el proceso gráfico y algebraico ha sido abordada por varios autores (Borges et al, 2010; Duval, 1996; García et al., 2004; Peralta y Soto, 2003; Sanabria, 2013; Polanía et al., 2015), particularmente en Europa, como es el caso de Fuster y Gómez (1997) quienes demuestran que los estudiantes de las carreras técnicas o científicas presentan deficiencias significativas en el aprendizaje del concepto de integral, en donde logran identificar como principal problema el cálculo de primitivas y la aplicación indiscriminada de la regla de Barrow. Así mismo, en Latinoamérica se ha podido constatar distintas investigaciones como las de Ibarra et al. (2002) y Grijalva et al. (2002) quienes pudieron demostrar la articulación de registros gráficos y algebraicos para el Cálculo Integral y Diferencial en estudiantes de las carreras de ciencias e ingeniería de la Universidad de Sonora.

En este mismo contexto en Sudamérica, Gutiérrez et al. (2017) presentan las dificultades de aprendizaje en el concepto de derivada de una función de variable real, esta investigación se ha realizado con estudiantes de los programas de ingeniería en la Universidad Militar de Nueva Granada. Destacan el inconveniente de tipo algebraico, aritmético y de interpretación simbólica de los límites al tratar de derivar con el concepto del límite y proponen un Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA) como una alternativa para la enseñanza de la derivada. Así mismo, investigaciones como las de Vrancken et al. (2006) encuentran problemas similares a los detallados anteriormente, centrándose esencialmente en el concepto de límite. Esta investigación destaca el apareamiento de obstáculos en el proceso de asimilación del concepto, derivando dificultades como: representación gráfica de funciones, comprensión de lo que ocurre en el límite del punto y no en el punto, reconocer e interpretar límites laterales, entre otras.

Con base a lo mencionado, cabe destacar la importancia de la asimilación del aspecto gráfico y algebraico para el concepto de función, es así que esta investigación aporta significativamente al campo de la docencia ya que a través de ella se enfoca esta dificultad de aprendizaje en estudiantes de Pedagogía

de las Matemáticas y la Física, por lo que se ha planteado el objetivo de investigación apoyado para su cumplimiento de una metodología descriptiva: determinar la existencia de problemas en los estudiantes al momento de relacionar las representaciones gráficas y algebraicas para funciones de variable real, el mismo que busca resaltar la enseñanza de esta relación y que de esta manera sean fructíferas en su futuro profesional. Mientras esta dificultad esté latente se puede estar seguro que los conceptos esenciales para la enseñanza aprendizaje de los temas consecutivos en la Matemática va a persistir, factor que se le puede atribuir a la enseñanza tradicional y a las mecanizaciones que presentan los estudiantes.

Este artículo se encuentra organizado de la siguiente manera: introducción, en la que se presenta los antecedentes, el problema y el objetivo que se pretende alcanzar; marco teórico, la fundamentación teórica y la evidencia empírica; Datos y metodología, se destaca el procedimiento realizado para la aplicación de la encuesta y el proceso de análisis de datos; Discusión de resultados, se presenta los resultados y se los compara con otros autores; Conclusiones y por último la las referencias bibliográficas.

Evolución Histórica del Concepto de Función

En el campo educativo actual existen diferentes tendencias pedagógicas que enfocan la enseñanza aprendizaje de la Matemática desde diferentes perspectivas, todas ellas con características propias y con la potencialidad de ser utilizadas partiendo de una realidad contextualizada y que en nuestro medio no escapa de temas económicos, técnicos o logísticos. En la introducción al presente trabajó se mostró que en nuestras aulas existe un marcado referente por el estudio del concepto de función desde sus caras verbal, numérica, gráfica y analítica, lo cual no obedece a meras cuestiones del azar o caprichos por parte del docente, o cuestiones que atañen a la formación de un determinado profesional, sino que responde a una construcción que ha tomado muchísimos años, en este orden de ideas se coincide con el criterio de Ríbnikov (1974), quien manifiesta que el proceso de formación de conceptos matemáticos, así como de los procedimientos para la solución de problemas abarca un gran intervalo de tiempo y además atraviesa un largo periodo de perfeccionamiento.

Es importante señalar que conocer el origen de los contenidos matemáticos constituye una herramienta pedagógica indispensable para llegar al estudiante y lograr en él un mejor aprendizaje. En este marco, es sustancial para la comprensión del concepto de función considerar el desarrollo que ha sufrido a lo

largo de los años, dicha evolución se expone en el trabajo de las investigadoras Sastre et al. (2008); quienes resumen la evolución del concepto en la Tabla 1.

Como se puede apreciar en la Tabla 1, los conocimientos matemáticos sobre funciones se construyen al paso de los años, en los cuales se han ido incorporando disímiles ideas tales como tablas de valores o representación mediante curvas, posteriormente aparecen las variables y su relación por medio de ecuaciones, para finalmente establecerse a la función como una relación de correspondencia arbitraria.

Tabla 1. *Definición de función de acuerdo a la época.*

Época	Definición
Siglo XVII	<p>Cualquier relación entre variables.</p> <p>Una cantidad obtenida de otras cantidades mediante operaciones algebraicas o cualquier otra operación imaginable.</p> <p>Cualquier cantidad que varía de un punto a otro de una curva.</p> <p>Cantidades formadas usando expresiones algebraicas y trascendentales de variables y constantes.</p>
Siglo XVIII	<p>Cantidades que dependen de una variable.</p> <p>Función de cierta variable como una cantidad que está compuesta de alguna forma por variables y constantes.</p> <p>Cualquier expresión útil para calcular.</p>
Siglo XIX	<p>Correspondencia entre variables.</p> <p>Correspondencia entre un conjunto A y los números reales.</p> <p>Correspondencia entre dos conjuntos.</p>

Enseñanza de Funciones y sus Obstáculos

Dificultades en la Asimilación del Concepto de Función

Pedagógicamente hablando, para que el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática funcione correctamente, es necesario que los estudiantes manejen terminología, símbolos, objetos y conceptos básicos inherentes a cada tema, en tal caso, es deseable que en el momento de trabajar con una asignatura ellos sepan asociar estos elementos. En ese marco, se coincide con Sanabria (2013) quien le otorga un valor pedagógico importante a las representaciones, lenguaje, conversión, símbolos, semiótica y

narrativas simbólicas en la comprensión de Matemática, a la vez que destaca la importancia de lograr que los estudiantes sean capaces de relacionar de distintas maneras la representación de objetos matemáticos para una mejor enseñanza aprendizaje de la asignatura. Además, la realidad en la Carrera de Pedagogía de las Matemáticas y la Física permite reconocer que hay una realidad compleja y persistente, que es característica del sistema académico precedente, lo cual impide que los estudiantes puedan alcanzar a desarrollar diversas etapas del conocimiento en cuanto a esta y otras temáticas de estudio.

En diversas investigaciones se manifiesta que uno de los inconvenientes que se presenta para comprender el concepto de función yace en las actividades de pasaje entre registros semióticos del concepto de función, particularmente en el pasaje del registro gráfico al algebraico tal como lo indican García et al. (2004). Similar situación también se puede encontrar en Gil et al. (2009) quienes en un grupo de estudiantes de distintas carreras universitarias detectaron dificultades en la comprensión y manipulación de funciones lineales empleadas en un determinado modelo matemático, dichos obstáculos tienen que ver principalmente con la confusión generada cuando se modifican pendientes o cuando el modelo relaciona expresiones gráficas y matemáticas. Adicionalmente, Borges et al. (2010) constataron que la mayoría de los estudiantes no tiene la habilidad para establecer la relación entre los diferentes sistemas de representación de una función (modelos, diagramas, lenguaje hablado y símbolos escritos), muchos de ellos se limitan únicamente a trabajar con la representación algebraica, asimismo, indican que existe un nivel bajo de comprensión del lenguaje algebraico en el contexto geométrico.

López y Sosa (2008) mencionan que la dificultad al momento de trabajar el concepto de función es evidente, ya que observaron los errores cometidos por los alumnos del nivel medio superior, que muchas de las veces suelen confundirse con otras nociones matemáticas. A esto se suman Páez y Hitt (2003) quienes realizan investigaciones preliminares sobre la construcción del concepto de límite, como elemento clave para la enseñanza de funciones. Esto muestra la evidencia suficiente para asegurar que el problema está latente, en algunos casos se atribuyen factores esenciales a la dificultad de aprendizaje del concepto de función, donde se destacan actividades que únicamente giran alrededor del registro algebraico, desligando la interacción entre otros registros, como el gráfico; queda claro entonces que cuando los estudiantes adquieran destreza en el manejo de las distintas formas de representación de una

función habrán logrado reforzar el pensamiento matemático y habilidades para la resolución de problemas (Morales, 2013).

Las TIC para la Enseñanza de la Matemática

En las Instituciones de Educación Superior (IES) a nivel nacional se ha cambiado la forma de pensar las metodologías de enseñanza, apoyándose actualmente en las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), es de esta manera que se puede ver una enseñanza diferenciada a la tradicional.

En el siglo XXI con el auge de las tecnologías no se puede estar ausente del uso de las mismas, es así que Grisales (2018) establece la necesidad de generar oportunidades de inclusión tanto para docentes como para estudiantes y de esta manera puedan ser competentes en el uso de las TIC, promoviendo una apropiación por parte de los actores con el fin de optimizar las herramientas con las que se cuenta.

El docente de hoy en día es autodidacta y se convierte en quién diseña estrategias de enseñanza para los estudiantes (Padilla y Mayoral, 2020), por lo que queda claro la importancia del uso de las nuevas tecnologías con énfasis en la utilización de recursos que potencialicen el aprendizaje. Por lo contrario, Olivares y Sotomayor (2022) realizan una investigación minuciosa sobre artículos publicados que abordan TIC, y destacan la deficiencia de su uso para el campo de la educación, además que recalcan su importancia e integración en el proceso de enseñanza aprendizaje, explicando que la comunidad educativa es consciente de esta gran necesidad.

Tomando como referencia la enseñanza actual de los diferentes tópicos en matemáticas, se evidencia algunas investigaciones en las que los autores han intervenido con el uso de TIC. Citando como en algunos de los casos a Hermosillo y Maldonado (2019) quienes han incluido el software GeoGebra para la enseñanza del Cálculo Diferencial, llegando a obtener resultados significativos en la actividad central de resolución de problemas en Matemática. De la misma manera, Viltres et al. (2020) confirman las dificultades de aprendizaje en contenido del trabajo con matrices en la asignatura de Álgebra Lineal, por lo que desarrollan *Softmatrix*, un software capaz de contribuir a la formación profesional de los estudiantes de la carrera de ingeniería, destacando por la efectiva forma de mejorar el aprendizaje del trabajo con matrices.

Centrándose aún más, para el aprendizaje de funciones algebraicas y trascendentales se ha podido desarrollar la implementación de aplicaciones móviles de realidad aumentada, que tengan como objetivo

beneficiar no solo a los estudiantes sino también a los docentes, dado que de esta manera se enseña de manera práctica y vivencial, llevando a cabo la interactividad del aprendizaje móvil que favorece el cumplimiento de las competencias digitales pero sobre todo el aprendizaje de funciones matemáticas (Díaz y Espinosa, 2020).

Como se puede observar, se ha podido presentar a manera de ejemplo algunas investigaciones que ayudan a comprobar la inclusión de las TIC para la enseñanza de algún tópico en las matemáticas, ahora, centraremos principal atención a la literatura concerniente a la enseñanza de funciones de variable real, con la finalidad de destacar las propuestas o alternativas que se muestran como esenciales para que el proceso de enseñanza aprendizaje sea el óptimo y que los resultados esperados apunten a una enseñanza de calidad, promoviendo un aprendizaje significativo.

Una de las alternativas más promovidas para la enseñanza de funciones de variable real es el uso del GeoGebra (Gay et al., 2014; Tito et al., 2013; Vigo, 2020). Estos autores centran principal importancia en la modelización dinámica y las diferentes aplicaciones que este promueve, Tito et al. logran resultados significativos en la inclusión de este software, permitiendo que los alumnos sean capaces de: desarrollar el pensamiento exploratorio, indagar, simular situaciones, utilizar vocabulario específico y la toma de decisiones acertadas para la resolución de problemas, motivando la elaboración de tareas.

Otra alternativa diferente es el uso de la calculadora científica, tal como lo argumenta Flores et al. (2019) en su investigación, que la consideran como un medio que “permite movilizar conocimientos mediante la coordinación de diferentes registros de representación semiótica de la función [...]” (p. 691). Es obvio pensar que el cambio de los registros en una calculadora permiten tal representación, ya que una calculadora al igual que el GeoGebra (otra calculadora) generan una tabla de datos que puede ser representada en un registro gráfico, siendo ideal para la enseñanza no solo de funciones sino de diferentes contenidos matemáticos.

METODOLOGÍA

El presente estudio corresponde a un diseño de investigación descriptiva debido a que se caracterizó el

objeto de estudio y se llegó a conocer las dificultades predominantes en la comprensión del concepto de función a través de la interpretación de los resultados obtenidos. Además, cuenta con un enfoque mixto debido a que se recolectaron los datos empíricos en fuentes de primer nivel que sirvieron para la revisión de literatura, la elaboración del instrumento y la discusión de resultados. Asimismo, por medio del enfoque cuantitativo se pudo organizar los resultados que arrojó el instrumento aplicado y posteriormente realizar el análisis correspondiente con apoyo de estadística descriptiva.

La población elegida para el presente estudio se obtuvo a través de un procedimiento no probabilístico por conveniencia, donde participaron cuarenta y nueve estudiantes del primer año de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales Matemáticas y la Física en el periodo académico ordinario Abril - Septiembre 2022, la razón de este escogitamiento se da porque los conocimientos correspondientes al concepto de función se imparten en los primeros años de estudio y constituyen la base de la Matemática que se dan en el programa de grado.

Se utilizó como técnica la encuesta, y como instrumento un cuestionario (Anexo 1). El cual fue diseñado a través de la plataforma Google Forms y estuvo estructurado por 4 reactivos de opción múltiple que permitieron identificar las dificultades existentes en la comprensión del concepto de función. Para la validación del instrumento se tomó como referencia el propuesto por Peralta y Soto (2003). El cuestionario se aplicó enviando el enlace generado por la plataforma Google Forms vía mensaje de texto a los estudiantes, luego se dio un tiempo de 12 minutos para que contesten y las respuestas se almacenaron automáticamente en un archivo .csv que permitió posteriormente el análisis y la interpretación de los datos.

Para el análisis e interpretación de los datos se procedió de la siguiente manera: con ayuda de la estadística descriptiva se organizó los datos de cada uno de los reactivos en tablas de frecuencia con sus respectivos porcentajes, de ellos se escogieron los más destacados para realizar la interpretación y discusión, en la que se contrastaron los hallazgos obtenidos con las semejanzas y diferencias de otras investigaciones, lo que posteriormente permitió el cumplimiento del objetivo y el planteamiento de las conclusiones.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Las preguntas del cuestionario versan sobre las distintas formas de representación de una función y dos

de sus principales características (dominio y recorrido), en él los estudiantes del primer año de Pedagogía de las Matemáticas y la Física deben relacionar adecuadamente las distintas formas de representación de una función.

En la primera parte, se pide vincular una de las expresiones algebraicas con la gráfica dada. A continuación, se presenta una función racional acompañada de varias gráficas y se le solicita al estudiante establecer la correspondencia adecuada entre la función y su gráfica. Luego, se requiere que de un conjunto de funciones expresadas gráficamente se asocie la forma algebraica correcta. Finalmente, se invita a relacionar apropiadamente el dominio y recorrido de una función definida por partes. Las preguntas se presentan en el Anexo 1.

A continuación se presentan los resultados obtenidos del cuestionario aplicado, cada una de las tablas corresponde a una pregunta del instrumento acompañada de su discusión.

Tabla 2. Expresión algebraica de una gráfica de función dada

Opciones	Frecuencia	Porcentaje
a)	31	68,90%
b)	7	15,60%
c)	6	13,30%
d)	1	2,20%
Total	45	100%

En la Tabla 2 se presentan los resultados obtenidos de la pregunta 1 del cuestionario, en ella se verifica que 31 estudiantes eligieron la opción correcta en cuanto a la relación de la gráfica con la expresión algebraica; sin embargo, 14 encuestados eligieron las opciones incorrectas. Esto se podría referir a que en la opción $f(x) = x - 2$ el estudiante no interpreta el segundo término (-2) como ordenada en el origen, ya que no asocia el -2 con el parámetro b de la forma $f(x) = mx + b$, donde b es la ordenada en el origen y m representa la pendiente de la recta. En la opción $f(x) = 2x$, la confusión se podría dar porque el término que acompaña a x se está vinculando erróneamente con la ordenada en el origen, cuando en realidad es la pendiente de la recta. Por último, en $f(x) = -2x$ el término -2 de la ecuación se está referenciando equivocadamente con la intercepción de la recta en el eje x .

Los resultados obtenidos concuerdan con lo que sostienen Lopez y Sosa (2008), donde es evidente la

confusión con otros objetos matemáticos como son: pendiente de una recta, ordenada en el origen e intersección con los ejes coordenados. Esta situación también se puede encontrar en la investigación realizada por Gil et al. (2009) en la que se identificaron dificultades similares en torno al manejo de modelos matemáticos que utilizan funciones lineales. Es así que este problema se podría atribuir a un posible enfoque desarticulado de la Matemática con otras ciencias en escenarios de la vida cotidiana.

En la Tabla 3 se tienen diferentes resultados a la pregunta 2, lo cual indica que los estudiantes no tienen clara la noción de función, en consecuencia tienen problemas para establecer una correcta relación entre las formas algebraica y gráfica de este objeto matemático. En este contexto, se observa que 9 estudiantes contestaron correctamente a esta pregunta y 36 estudiantes no tienen claro esta relación. En torno a este particular, identifican equivocadamente la gráfica de $f(x) = \left(\frac{x^2-9}{x+3}\right)$ con la de otras funciones que se han incluido a propósito y cuyas gráficas son similares, dado que se comportan como equivalentes en el mismo entorno ($g(x) = x + 3$; $h(x) = x + 3$ con $x \neq -3$; $i(x) = x - 3$ con $x \neq 3$; ó $j(x) = -x + 3$ con $x \neq 3$). Adicionalmente, no se considera como criterio de respuesta el valor para el cual la función f dada no se define dentro del conjunto de los números reales, en este caso $x = 3$.

Tabla 3. Expresión gráfica de una función dada

Opciones	Frecuencia	Porcentaje
a)	8	17,80 %
b)	9	20,00 %
c)	9	20,00 %
d)	11	24,40 %
e)	8	17,80 %
Total	45	100,00 %

En este marco, se coincide que un gran número de estudiantes presentan deficiencias en la capacidad para relacionar de manera adecuada las formas de representación de una función y ejecutar correctamente el paso de una expresión algebraica a una gráfica (Sanabria, 2013; García et al., 2004; Borges et al., 2010; Grijalva et al., 2002; Ibarra et al., 2002; Duval, 1996). El análisis respectivo reafirma que los estudiantes tienen poco clara la idea de función con estructura equivalente, en la que su principal

característica es una gráfica semejante a la de una función dada. Además, vale recalcar el uso indiscriminado de las calculadoras gráficas (GeoGebra, Desmos) en las que por costo computacional y eficiencia, se reducen los cálculos y no se traza la gráfica correspondiente con todos sus elementos, como son asíntotas, puntos de discontinuidad, valores definidos en el conjunto de número reales, entre otros; lo que se suma a los problemas descritos anteriormente.

La Tabla 4 muestra la frecuencia de los resultados de la vinculación de la gráfica con la expresión algebraica correspondiente. Donde se puede observar una elección correcta en la mayoría de los casos, sin embargo, en la gráfica 3 que corresponde a una función exponencial existe un número considerable de estudiantes que contestan erróneamente, esto se podría interpretar como una falta de habituación al trabajo con estos componentes.

Tabla 4. Vinculación de expresiones gráficas y algebraicas

Gráficas \ Opciones	a)	b)	c)	d)	e)
1)	1	2	36	3	3
2)	1	0	2	40	2
3)	29	5	3	3	5
4)	3	4	2	1	35

Además, se puede agregar que la gran mayoría de aciertos en esta pregunta corresponden a funciones que son de uso frecuente en la enseñanza precedente y en el primer año de la carrera. Esto concuerda con lo manifestado por Stewart (2012) quien asegura que hay ciertos tipo de funciones que se pueden calificar como principales y que aparecen a menudo en la enseñanza de distintas ramas de la Matemática.

Tabla 5. Dominio y rango de una función definida por partes

Opciones	a)	b)	c)	d)
Dominio	6	11	16	12
Rango	2	4	5	34

En la Tabla 5 se muestran las frecuencias de los resultados del reactivo en el que se incorporan

simultáneamente componentes gráficos y algebraicos. Los datos indican diferentes realidades para el dominio y rango de la función. En el dominio se han seleccionado distintas opciones, donde un menor número de estudiantes eligen la respuesta correcta (opción b), lo cual revela que se establece una relación inadecuada entre el gráfico de la función con su dominio. Por otro lado, para el caso del rango el panorama es distinto, pues la mayoría de las respuestas señalan el inciso correcto (opción d). Lo obtenido en esta pregunta confirma que existen problemas al relacionar las distintas formas de representación de una función.

Este es otro elemento que apoya a los hallazgos obtenidos y discutidos anteriormente (Sanabria, 2013; García et al., 2004; Borges et al., 2010; Gil et al., 2009; López y Sosa, 2008; Grijalva et al., 2002; Ibarra et al., 2002; Duval, 1996), en este marco se considera importante la inclusión de elementos característicos de una función como lo son el dominio y el rango, dado que ayudan a determinar en qué parte de los números reales la función está definida, así como también brindan información útil en la transición del registro algebraico al gráfico y viceversa.

Con base a los resultados, se identifica que existen problemas en la comprensión del concepto de función en los estudiantes de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales Matemática y la Física, específicamente en el paso de la forma algebraica a la gráfica y en el manejo de elementos característicos de este objeto matemático. Se considera que esta realidad podría ser generalizada para otras carreras de la Universidad Nacional de Loja y del resto del país, ya que se recibe a estudiantes que proceden de un mismo sistema educativo. Estos hechos permiten manifestar que esta realidad educativa no es únicamente privativa de nuestro medio, sino que ocurre también en otras latitudes y contextos.

CONCLUSIONES

La presente investigación se realizó con la participación de 49 estudiantes del primer año de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales Matemáticas y la Física, durante el periodo académico ordinario Abril - Septiembre 2022, donde se pudo encontrar dificultades en la comprensión del concepto de función, es decir, se determinó que al trabajar con funciones racionales que se definen únicamente para cierto campo de los números reales existen dificultades por parte de los estudiantes al momento de

relacionar las representación algebraica con la gráfica y en la manipulación de elementos característicos como son dominio y rango. Sin embargo, en el paso del registro algebraico al gráfico para funciones de uso frecuente como lineales, cuadráticas, exponenciales y valor absoluto no se encontraron mayores obstáculos para el caso investigado.

La realización de este estudio constituye un aporte para la carrera, puesto que no existen estudios previos relacionados a esta temática y permite ser un insumo para mejorar la práctica docente dentro de la cátedra relacionada con el estudio de funciones. Además, contribuye a la bibliografía existente, sumándose a las investigaciones realizadas por otros autores en otros contextos y realidades diferentes.

Se recomienda que esta investigación sea considerada como punto de partida para futuras investigaciones en las que se se considere no solamente la identificación de los problemas de aprendizaje de los conceptos matemáticos, sino también se les dé solución a través de estrategias didáctico pedagógicas, uso de recursos y la inclusión de tecnología educativa.

La principal limitación para este estudio es que se ha realizado solamente para un caso concreto y no se ha ejecutado en más carreras de la universidad para tener una visión más amplia de cómo ocurre el proceso de enseñanza aprendizaje de esta temática. Asimismo, el caso particular en el que se desenvuelve esta investigación se circunscribe a las funciones de variable real, por lo que se recomienda extender el estudio a otros campos de la Matemática donde se vean problemas similares.

LISTA DE REFERENCIAS

- Borges, A. C., Salazar, M. A. M., & Piquet, J. D. (2010). Análisis del proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función en estudiantes de economía. *Educación Matemática*, 22(3), 5-21.
- Díaz, J. E. M., & Espinosa, L. A. M. (2020). Realidad aumentada como herramienta de apoyo al aprendizaje de las funciones algebraicas y trascendentes. *Revista Educación en Ingeniería*, 15(29), 34-41.
- Duval, R. (1996). Les représentations graphiques: fonctionnement et conditions de leur apprentissage. Actes de la 46^eme Rencontre Internationale de la CIEAEM, tomo 1, 3-15. Toulouse, Université Paul Sabatier.
- Flores, J., Neira, V., Carrillo, F., & Peñaloza, T. (2019). Funciones reales de variable real: mediación de la calculadora científica.
- Fuster, J. L. L., & Gómez, F. J. S. (1997). Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de integral. *Divulgaciones Matemáticas*, 5(1/2), 61-76.
- García Quiroga, L., Vázquez Cedeño, R. A., & Hinojosa Rivera, M. (2004). Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería. *Ingenierías*, 7(24), 27-34.
- Gay, M., Tito, J., & San Miguel, S. (2014). GeoGebra como facilitador del estudio de funciones de variable real. In *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*. Recuperado de: <http://www.oei.es/historico/congreso2014/memoriactei/637.pdf>.
- Gil, M. D. P. P. R., de la Palma Gómez-Calero, M., & Barajas, R. D. P. (2009). Dificultades de aprendizaje del componente gráfico-matemático del Modelo IS-LM de los Alumnos de Macroeconomía de la Universidad de Sevilla. *Revista de Docencia Universitaria*, 7(4).
- Grijalva, A. & Ibarra, S. (2002). *El papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza del Cálculo Integral*. Universidad de Sonora. Hermosillo, México.
- Grisales-Aguirre, A. M. (2018). Uso de recursos TIC en la enseñanza de las matemáticas: retos y perspectivas. *Entramado*, 14(2), 198-214.
- Gutiérrez Mendoza, L., Buitrago Alemán, M. R., & Ariza Nieves, L. M. (2017). Identificación de

- dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un OVA como mediación pedagógica. *Revista Científica General José María Córdova*, 15(20), 137-153.
- Hermosillo, C. A. O., & Maldonado, M. E. M. (2019). Geogebra como herramienta en la enseñanza del cálculo para adquirir competencias en estudiantes de ingeniería. *ANFEI Digital*, (11).
- Ibarra, S.E., Bravo, J.M. y Grijalva, A. (2002). El papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza del cálculo diferencial. *Memorias de la XII semana regional de investigación y docencia en matemáticas*. Hermosillo, Sonora.
- López, J., & Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato.
- Morales, Z. (2013). Las representaciones semióticas: un enfoque cognitivo de análisis de las dificultades en el aprendizaje del álgebra.
- Olivares, M. D. F., & de Sotomayor, I. D. Á. (2022). Las TIC para enseñar¿también en Matemáticas?. *Cuaderno de Pedagogía Universitaria*, 19(38), 109-119.
- Padilla, I. y Mayoral, V. (2020). Las tutorías académicas en el fortalecimiento del álgebra en estudiantes de octavo grado en una escuela distrital de Barranquilla. *Zona Próxima*, 32, 33-54
- Páez, R. E., & Hitt, F. (2003). Dificultades de aprendizaje del concepto de límite de una función en un punto. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, (32), 97-108.
- Peralta, J., & Soto, L. (2003). Dificultades para articular los registros, gráfico, algebraico, tabular: el caso de la función lineal. *Acta latinoamericana de Matemática Educativa*, 16(2), 721-727.
- Polanía, E. P., Díaz, Y. T., & Plazas, J. M. (2015). La conversión entre los registros de representación de la función lineal y criterios de congruencia entre algunas de sus representaciones. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 1(1), 72-77.
- Ríbnikov, K. (1974). *Historia de las Matemáticas*. Editorial Mir Moscú.
- Sanabria, G. I. N. (2013). Representaciones, lenguaje, conversión, símbolos, semiótica, narrativas simbólicas...¿ qué tienen que ver con la comprensión en matemáticas?. *Revista Científica*, 378-382.
- Sastre, V., Rey, G., & Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la historia. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 16, 141-155.

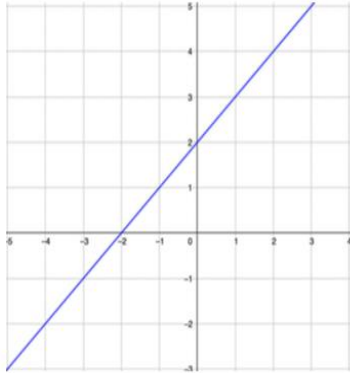
- Stewart, J. (2012) *Cálculo de una variable Trascendentes Tempranas*. México. Séptima edición. Cengage Learning.
- Tito, M. J., San Miguel, S. E., & Gay, M. (2013, July). Estudio de funciones de variable real en el entorno dinámico que ofrece GeoGebra. In VIII Congreso de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología.
- Vigo Ingar, K. (2020). Instrumentalización del software Geogebra y el aprendizaje del concepto de razón de cambio de funciones reales de variable real por parte de los estudiantes de ingeniería.
- Viltres, Y. M., Dieguez, F. E. C., Díaz, A. O., & Hechavarría, A. M. (2020). Softmatrix: Software para el trabajo con matrices. *3 c TIC: cuadernos de desarrollo aplicados a las TIC*, 9(2), 83-117.
- Vrancken, S., Gregorini, M., Engler, A., & Müller, D. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Premisa*, 29, 9-19.

ANEXO 1.L

Cuestionario

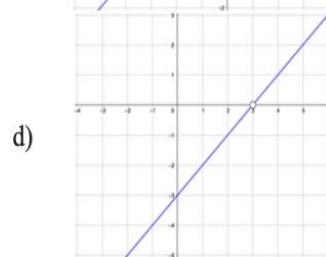
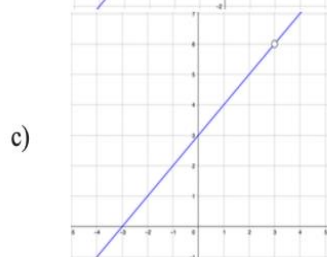
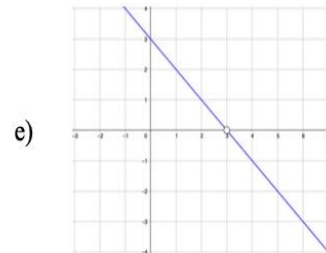
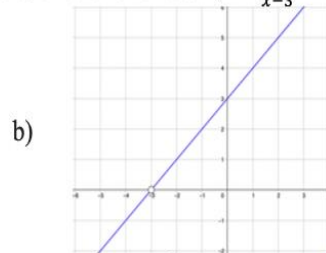
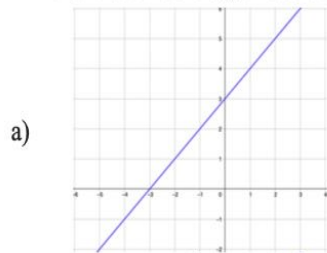
El siguiente instrumento corresponde a un estudio que se realiza sobre funciones de variable real, por lo que se pide de la manera más comedida se digna a contestar con la seriedad del caso. Los datos recolectados serán utilizados únicamente con propósitos académicos y se conserva el anonimato del encuestado.

1. Determine la expresión algebraica que corresponde a la siguiente gráfica



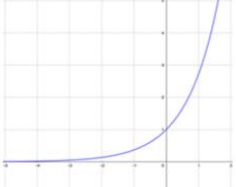
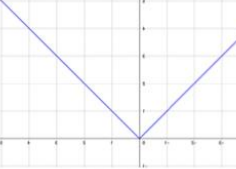
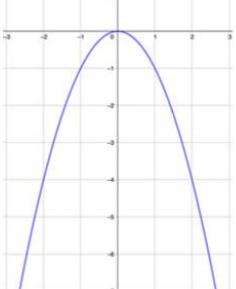
- a) $f(x) = x + 2$
- b) $f(x) = x - 2$
- c) $f(x) = 2x$
- d) $f(x) = -2x$

2. Indique cuál de las gráficas corresponde a la función $y = \frac{x^2-9}{x-3}$

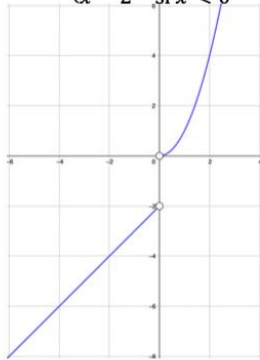


3. Empareje la gráfica con la expresión algebraica correcta

a) $y = e^x$	1)	b) $y = x + 4$	2)

c) $y = x^2$	3) 	d) $y = -x^2$	4) 
e) $y = x $	5) 		

4. La función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 0 \\ x - 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$, tiene la siguiente gráfica



El dominio de la función es:

- a) \mathbb{R}
- b) $\mathbb{R} - \{0\}$
- c) $\mathbb{R} - \{-2\}$
- d) $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

El rango de la función es:

- a) \mathbb{R}
- b) $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
- c) $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$
- d) $]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$