

Caracterización de lugares geométricos y la complejidad de la dimensión fractal

Alberto Gutiérrez-Borda¹

egutierrez@unica.edu.pe

<https://orcid.org/0000-0001-6260-2419>

Universidad Nacional San Luis Gonzaga

Facultad de Ciencias

Ica - Perú

RESUMEN

Para comprender y explicar los diversos fenómenos naturales en el mundo, ya no es suficiente utilizar dimensiones enteras. Este trabajo responde a la interrogante: ¿Existe complejidad para obtener una dimensión fractal asociado a distintas curvas y conjuntos? La respuesta tiene que ver con el propósito de explicar la medida de conjuntos, precisando su estimación teórica y numérica de la dimensión fractal. Como consecuencia de la discusión del concepto de dimensión y la caracterización de objetos, es posible concluir que hay una diferencia substancial entre la geometría euclidiana y la geometría fractal, generado por nuevos conceptos como: autosimilitud, autosemejanza, dimensión de escala, dimensión de Hausdorff, dimensión topológica y objetos fractales.

Palabras clave: *autosemejanza; geometría fractal; dimensión topológica; fractales.*

¹ Autor Principal

Characterization of loci and the complexity of the fractal dimension

ABSTRACT

To understand and explain the various natural phenomena in the world, it is no longer enough to use whole dimensions. This work answers the question: Is there complexity to obtain a fractal dimension associated with different curves and sets? The answer has to do with the purpose of explaining the measurement of sets, specifying its theoretical and numerical estimate of the fractal dimension. As a consequence of the discussion of the concept of dimension and the characterization of objects, it is possible to conclude that there is a substantial difference between Euclidean geometry and fractal geometry, generated by new concepts such as: self-similarity, self-similarity, scale dimension, Hausdorff dimension, topological dimension and fractal objects.

Keywords: *self-similarity; fractal geometry; topological dimension; fractals.*

Artículo recibido 01 abril 2023

Aceptado para publicación: 15 abril 2023

INTRODUCCIÓN

La geometría euclidiana, el cálculo y la trigonometría son las herramientas que mayormente se utiliza para modelar los fenómenos naturales. Los modelos son descritos en términos de puntos, líneas rectas, círculos, parábolas y otras curvas simples, sin embargo, algunos fenómenos naturales se describen mejor por una dimensión cuyo valor no es necesariamente entero; es decir, no corresponde a una dimensión euclidiana.

Para realizar el respectivo análisis, se toma como base los aportes de Benoit Mandelbrot, en razón de que los resultados de sus investigaciones abren espacios para realizar múltiples pesquisas dirigidos a distintas áreas del conocimiento, (Mandelbrot, 2003). Si ponemos atención a la interrogante: ¿hay complejidad para entender la dimensión fractal asociados a distintas curvas y conjuntos? La respuesta pasa por fundamentar si la geometría clásica o euclidiana son las más adecuadas para generar formas complejas y, observar qué sucede con su estructura cuando está sometida a una ampliación.

La geometría fractal, es el estudio de las geometrías de las formas irregulares, buen tiempo se hizo en forma independiente de la geometría euclidiana. En los trabajos de Barletta y Barbosa, se calculó una relación empírica para determinar el número de islas en una región geográfica cualquiera, con una superficie superior a r , mediante una expresión de la forma, $N(S) = ar^{-D}$, donde a y D son constantes, sus resultados fue que $D = \frac{1}{2}$, aún cuando otros estudio demuestran que es variable, (Barleita y Barbosa, 1993).

Kendel y Walker (1996) explica, que la mayoría de los modelos se construyen asumiendo un comportamiento simétrico y ordenado de las formas y fenómenos de la naturaleza que en algunas ocasiones eran aproximaciones gruesas de la realidad. Estos nos explican que los conocimientos lisos y ordenados no funcionen; sino que, cuando el fenómeno no se puede describir de manera simple, hay que pensar en algo anormal dentro del fenómeno bajo estudio lo está llevando hacia otro punto de observación donde su naturaleza tiende hacia la complejidad o hacia el caos, (Chanona et al., 2001).

Un gran número de objetos en la naturaleza son irregulares o fragmentados, hasta un grado tal que la geometría euclidiana no puede describir sus formas. Entonces, para el trabajo, el término fractal se define matemáticamente como un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica, (Denko et al., 1982). Hay que tener en cuenta, que en cada disciplina en donde se aplica la geometría fractal se ha señalado definiciones específicas al término fractal.

Entonces es preciso tomar en cuenta un conjunto de elementos definidos para el desarrollo del presente trabajo. Yano, señala que un fractal es un objeto geométrico compuesto de elementos también geométrico de tamaño y orientación variable (Yano, 1996), pero su aspecto es similar, con la particularidad de que, si a un objeto fractal lo aumentamos, los elementos que aparecen vuelven a tener el mismo aspecto, independientemente de cual sea la escala que se utilice. Se puede decir entonces, que los objetos tienen una estructura geométrica recursiva; afirmación que indica, para representar gráficamente un fractal, bastaría con encontrar la relación o la ley de recursividad entre las formas que se repiten; es decir, encontrar el objeto elemental y la ley de formación, luego establecer el algoritmo gráfico.

Por otro lado, existen dos tipos de objetos fractales: los matemáticos o determinísticos y los naturales o aleatorios. Los primeros son generados por ecuaciones y formas geométricas que son iteradas a diferentes escalas; y los segundos al igual que los fractales matemáticos presentan las mismas estructuras a diferentes escalas de observación; pero, se diferencian en que el intervalo de escala de observación es limitado; en los fractales matemáticos las escalas pueden ser infinita, mientras que en los naturales la escala que observa su propiedad de autosimilitud es finita, (Mandelbrot, 2003).

Una característica de los objetos fractales, y quizás la que mayor aplicación práctica tiene es la dimensión fractal, ya que esta se usa como una medida de la irregularidad de muchos procesos físicos, permite cuantificar el grado de accidentalidad de un objeto. En términos empíricos, la dimensión es el número de variables independientes o los grados de libertad; geométricamente es número mínimo de coordenadas que se requiere para especificar la posición de un punto en un objeto.

Tomando en cuenta estas consideraciones, queremos analizar y sistematizar, el concepto de medida y la dependencia del instrumento de medición, como se cuantifican los conjuntos, la complejidad para obtener una dimensión euclidiana, dimensión topológica, dimensión de escala, medida de Hausdorff, en este caso, la complejidad se entiende como la dificultad de entender la dimensión fraccionaria.

Principalmente, damos respuesta a la conjetura de existencia de lugares geométricos de curvas y conjuntos con dimensiones complejas correspondiente a fractales, los objetivos específicos son: a) caracterizar la variedad de lugares geométricos de curvas y conjuntos asociado a la complejidad y morfología de la dimensión fractal, b) establecer las posibles relaciones y principios de la geometría fractal comparado con la geometría euclidiana, desarrollando teoría de autosimilitud como una propiedad de los fractales, c) obtener el carácter fractal de la medida de conjuntos geométricos, relacionados con las distintas dimensiones.

PRINCIPIOS BÁSICOS

Primero analizamos brevemente lo que significa dimensión topológica, la definición inductiva dada por Poincaré para introducir este concepto fue la siguiente: Conjunto vacío, dimensión topológica $-1 = D$; punto, su dimensión topológica $0 = D$; segmento, dimensión topológica $1 = D$; cuadrado, dimensión topológica $2 = D$; cubo, dimensión topológica $3 = D$, (Smale y Hirsch, 1974).

Una definición distinta de dimensión topológica es la definición por semejanza, se obtiene desde un objeto H , partes iguales N , semejantes al original, con razón de semejanza r , entonces la dimensión topológica de H es el número D que verifica la fórmula $Nr^D = 1$, es decir,

$$D = \frac{\ln(N)}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}.$$

Esta definición se justifica desde la teoría de medida:

(a) La medida de la unión de N figuras que no se solapan $A_1, A_2, A_3, \dots, A_N$ es la suma algebraica de sus medidas, es decir: $m\left(\bigcup_{k=1}^N A_k\right) = \sum_{k=1}^N m(A_k)$.

(b) Si una figura A es semejante a otra figura B, con razón de semejanza r , la medida de A es proporcional a la medida de B, siendo la constante de proporcionalidad una potencia de la razón de semejanza,

$$m(A) = \left(\frac{1}{r}\right)^D \cdot m(B).$$

La media total del segmento AB es la suma de la medida de todos los subconjuntos iguales, $m(AB) =$

$$\sum_{k=1}^N m(s_k) = Nm(s_1); \text{ por otro lado, } m(AB) = \left(\frac{1}{r}\right)^D \cdot m(s_1), \text{ de donde}$$

$$N = \left(\frac{1}{r}\right)^D,$$

entonces, $r^D \cdot N = 1$, es el exponente D, es lo que se denomina dimensión de autosemejanza.

Justificación: consideramos un segmento; se divide, por decir, en dos partes iguales. $N = 2, r = \frac{1}{2}$,

se obtiene la fórmula,

$$D = \frac{\ln(N)}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\ln 2}{\ln 2} = 1,$$

es decir, dimensión de autosemejanza $1 = D$.

Para el caso de un cuadrado: se divide, por decir en 4 cuadrado iguales, $N = 4, r = \frac{1}{2}$, se obtiene:

$$D = \frac{\ln(N)}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2,$$

luego, la dimensión de autosemejanza es $2 = D$.

Para el caso de un cubo: se divide, por decir en 8 cuadrado iguales, $N = 8, r = \frac{1}{2}$, se obtiene:

$$D = \frac{\ln(N)}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\ln 8}{\ln 2} = 3,$$

luego, la dimensión de autosemejanza es $3 = D$.

La geometría euclidiana y las funciones elementales, tales como el seno, el coseno y los polinomios son la base del método tradicional para analizar datos experimentales. Una línea recta tiene dimensión uno, mientras que una curva fractal tendrá una dimensión cuyo valor es de entre uno y dos,

dependiendo del espacio que esta ocupe en el plano y de su comportamiento en sí, (De Guzmán, et al., 2000).

Si se considera que, $N_n \propto C r_n^{-D}$ donde N_n es el número de fragmentos del tamaño r_n , siendo C una constante, y D el índice de similitud de dimensión fractal, D puede ser estimada por:

$$D = \frac{\left(\log\left(\frac{N_{n+1}}{N_n}\right) \right)}{\log\left(\frac{r_n}{r_{n+1}}\right)},$$

para explicar esto, se considera el segmento de longitud unitaria, puede dividirse en partes mediante procedimientos diferentes: Si el segmento es primeramente dividido en dos partes, si $r_1 = \frac{1}{2}$, y como una de las partes se conserva y la otra se elimina, $N_1 = 1$. Posteriormente, la parte del segmento inicial conservada se divide también en dos partes y se conserva una de ellas de manera tal que $r_2 = \frac{1}{4}$ y $N_2 = 1$. En este caso D tiende a ser cero y equivale a la dimensión euclidiana porque siempre $N_n = 1$, sin importar el número de iteraciones o veces que se ejecute el proceso de división del segmento y de conservación de una parte de sus partes; e inclusive, la longitud tiende a aproximarse a cero conforme se incrementa el número de iteraciones.

Si el segmento es dividido en dos partes, pero conservándolas. Entonces, $r_1 = \frac{1}{2}$ y $N_1 = 2$. De la siguiente iteración se obtiene $r_2 = \frac{1}{4}$ y $N_2 = 4$; por lo tanto, $D = \frac{\log(2)}{\log(2)} = 1$. El resultado tiene sentido porque la longitud del segmento siempre será unitaria. Así, no es difícil crear líneas de dimensión euclidiana.

Si el segmento se divide en tres partes iguales y se conservan dos de los extremos. Así, $r_1 = \frac{1}{3}$ y $N_1 = 2$. Al repetir el proceso, $r_2 = \frac{1}{9}$ y $N_2 = 4$, entonces $D = \frac{\log(2)}{\log(3)} = 0,6369$, en este caso se tiene un fractal desconectado; además, es el fractal determinístico.

Si el segmento se divide en cinco partes iguales y conservando las partes de ambos extremos y la central, $r_1 = \frac{1}{5}$ y $N_1 = 3$, Al repetir el procedimiento en cada parte conservada $r_2 = \frac{1}{25}$ y $N_2 = 9$, resulta $D = \frac{\log(2)}{\log(5)} = 0,6826$.

Pues bien, así como fue posible encontrar dimensiones fractales con valores entre cero y uno para segmentos lineales eliminando partes, es factible encontrar al invertir el proceso, es decir, al incrementar la longitud del segmento. Por supuesto que también es posible aplicar los procedimientos de fragmentación a cuadrados, rectángulos y otros tipos de planos para estimar el valor de su respectiva dimensión fractal (Tang y Raper, 2002).

DIMENSIÓN Y COMPLEJIDAD

Según señala Koch, la teoría fractal puede ser considerada como una herramienta válida y útil para el estudio de fenómenos dinámicos en el cuerpo humano o en la naturaleza y nos permite una aproximación más acorde con la complejidad y la ausencia de linealidad existente en dichos procesos, (Schoreder, 1991).

La dimensión fractal es un índice matemático que podemos calcular y que nos permite cuantificar las características de los objetos o fenómenos fractales. Este índice se puede calcular de varias formas; la concepción de dimensión que se usa normalmente es la euclidiana clásica; de esta forma, la dimensión fractal es un índice que nos permite cuantificar mejor las características geométricas de objetos con geometría fractal. Los fenómenos con comportamiento fractal pueden ser representados por medio de gráficos de líneas, en estos gráficos podemos medir su dimensión fractal y lograr así cuantificar la complejidad de su dinámica caótica.

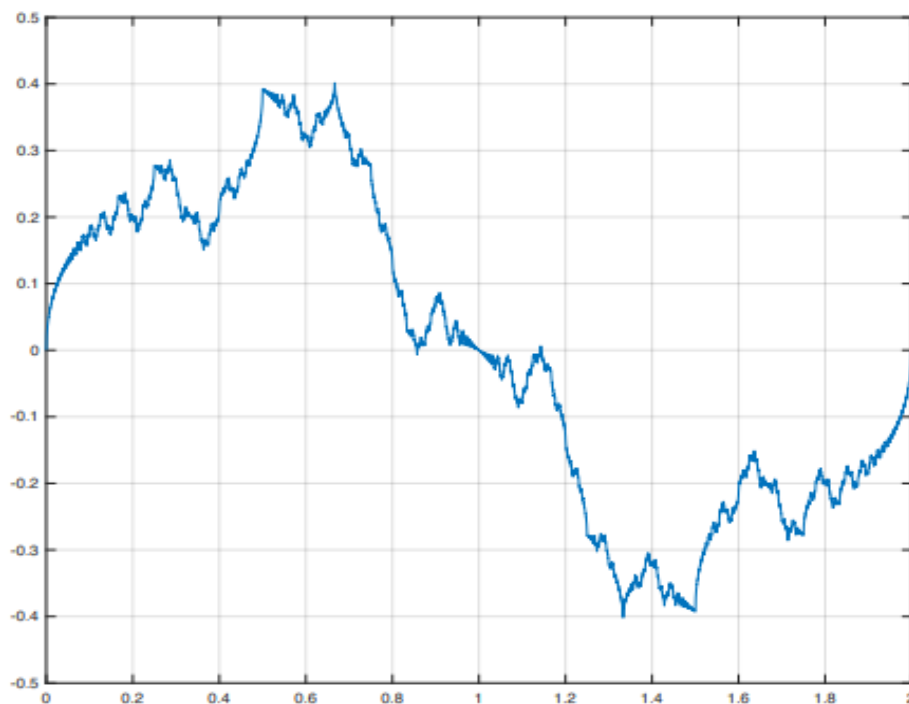
Al igual que cuando se habla del caos, una de las propiedades más significativas de los fractales y que resulta especialmente llamativa es el hecho de que se originan a partir de unas situaciones iniciales o reglas básicas, que darán lugar a figuras extremadamente compleja. Otra característica esencial del concepto de fractal es la autosemejanza. En el caso más concreto de los fractales, se aprecia como un objeto fractal cada vez que se cambia de escala, revela un claro parecido con la imagen anterior.

LAS FUNCIONES COMO OBJETO FRACTAL

Una función de la forma $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n^2\pi x)}{n^2} = \text{sen}(\pi x) + \frac{\text{sen}(4\pi x)}{4} + \frac{\text{sen}(9\pi x)}{9} + \frac{\text{sen}(16\pi x)}{16} + \dots$, presenta continuidad, pero no es derivable en ningún punto, entonces es una función con problemas. Sin embargo, se explica que casi todas, en el sentido de categoría de Baire, las funciones continuas no tienen derivadas en ningún punto. Es decir, para tener una idea de la gráfica de una función, así, esta función es la de Riemann, como un objeto fractal puede describir un fenómeno real mejor que la geometría euclidiana. Una cultura de imagen resulta importante en estos tiempos, sobre todo cuando se toma en cuenta el impacto de los ordenadores.

Figura 1:

El grafo de la función no derivable de Riemann en $x \in [0, 2]$



Fuente: Visible en Eceizabarrena (2021)

Según Weierstrass (1994) consideró que $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(2\pi n^2 x)}{n^2}$, aunque Riemann también asumió una función similar $f(x) = \frac{\cos(2\pi n^2 x)}{n^2}$, ambas funciones son continuas que carecen de derivada en

todos los puntos, el tema de continuidad y derivabilidad siempre es un tema de discusión en la investigación.

La continuidad de g es evidente por ser una serie uniformemente convergente de funciones continuas, figura 2, pero ni Riemann ni Weierstrass pudieron demostrar nada respecto de su derivabilidad (Tang y Raper, 2002). Sin embargo, se sabe que g no es derivable en los irracionales ni en los racionales de la forma $\frac{2n}{4m+1}, \frac{2n+1}{4m+2}$, pero existen infinitos puntos en los que g es derivable, concretamente los racionales de la forma $\frac{2n}{2m+1}, \forall m, n \in \mathbb{Z}$. La función de Weierstrass está definida en la recta y toma valores reales, es continua en todo punto y no es derivable en ninguno, el gráfico es una curva no rectificable con dimensión fractal mayor que 1. La demostración sobre la continuidad es inmediata, pero la no derivabilidad es más compleja, podríamos mostrar una variante de esta función $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$ siendo a, b reales, así que la función no es derivable en ningún punto de su dominio.

Una función en $[0, 1]$ continua no derivable en ningún punto, se define como:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Lo cual tiene carácter aparentemente simple, su construcción es muy semejante, salvo sustitución del coseno, extendiéndose por periodicidad a todo $\mathbb{R}$. La función sobre T se define entonces como,

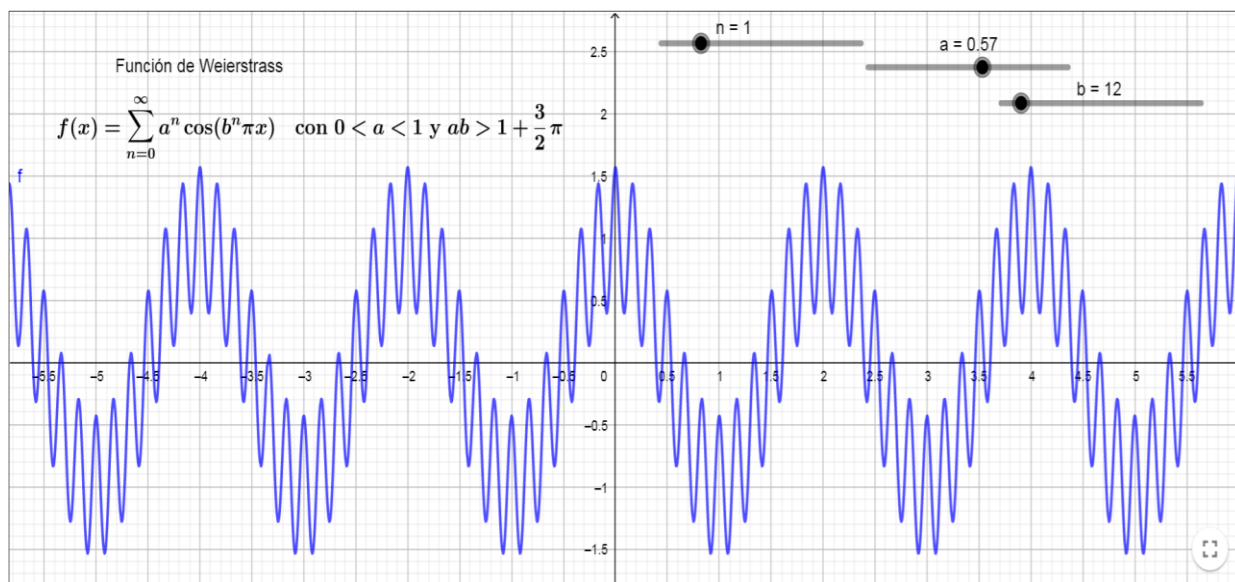
$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T(2^n x)}{2^n},$$

como T es acotada, la serie converge uniformemente, y por tanto w es continua. Se demuestra que no tiene derivada en ningún punto, la gráfica se puede interpretar como una suma parcial de la forma:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{T(2^k x)}{2^k}$$

lineal a trozos.

Figura 2: Función de Weierstrass que señala un comportamiento fractal



Fuente: Hecho en Geogebra por Luis Alejandro Ferro Alfonso

MANIPULACIÓN DE CONJUNTOS

Proceso geométrico para definir un conjunto: se divide un segmento en 3 partes iguales y suprimir la central, siguiendo indefinidamente la operación con cada uno de los segmentos más pequeños que vamos obteniendo.

Para construirlo se parte del intervalo cerrado $C_0 = [0, 1]$ se divide en tres partes iguales y se elimina la de en medio, obteniendo un conjunto C_1 que es la unión de dos intervalos cerrados disjuntos de longitud $\frac{1}{3}$, y $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, con cada uno de los intervalos que forman C_2 se repite el mismo proceso, obteniendo C_3 , que es la unión de 2^4 intervalos cerrados disjuntos de longitud 3^{-2} . Iterando el proceso se construye una sucesión C_k de conjuntos cerrados formados por la unión de 2^k intervalos cerrados disjuntos de longitud 3^{-k} . La medida o longitud de C_k es por tanto $\left(\frac{2}{3}\right)^k$ y tiende a cero cuando k tiende a infinito. Entonces $C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$, se continua de este modo. Estos conjuntos forman una sucesión decreciente $C_{k+1} \subset C_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, cuyo conjunto límite es (Gustavo, 2009),

$$C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k.$$

En principio parece un conjunto muy pequeño. De hecho, su longitud es cero. Sin embargo, tiene la cardinalidad del continuo; es decir, el mismo número de puntos que el intervalo $[0,1]$. Esto resulta claro, cuando se detecta que C es el conjunto de puntos cuya expresión decimal en base 3 tiene sólo ceros y 2. De

$$C = \left\{ \frac{d_1}{3} + \frac{d_2}{3^2} + \frac{d_3}{3^3} + \frac{d_4}{3^4} + \dots, d_k = 0 \text{ o } 2 \text{ para todo } k \right\}$$

sus propiedades topológicas que más resaltan son: es un conjunto perfecto; es decir, compacto y en el que todo punto es de acumulación; es totalmente desconexo. Su imagen no es más que un conjunto disperso de puntos, repartidos en el intervalo $[0,1]$. La pregunta: ¿qué lo convierte en un fractal? Dos propiedades características de todos ellos: a) es un conjunto autosemejante, que es la unión de dos copias de sí mismo reducidas a un tercio de su tamaño original; b) su dimensión fractal es fraccionaria, $\frac{\log 2}{\log 3} = 0,630905 \dots$

Vamos a justificar como resulta este valor del intervalo dado, se obtienen dos intervalos semejantes dividiendo el intervalo inicial en tres partes iguales. Se elimina la parte central, con lo que aparece dos intervalos semejantes al primero, con razón de semejanza $\frac{1}{3}$. Es decir, $N = 2, r = \frac{1}{3}$. La reiteración hasta el infinito del proceso permite reducir el intervalo generador, su dimensión fractal es

$$D = \frac{\ln(N)}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} = 0,630905,$$

luego, surgen las siguientes propiedades para que este conjunto: a) $C \neq \emptyset$, contiene entre otros puntos, a los extremos del intervalo; b) es cerrado y acotado, luego es cerrado de $\mathbb{R}$; c) en C no hay puntos aislados, todo punto de C es límite de las sucesiones formadas por los extremos de los intervalos de tamaño 3^{-k} que lo contienen.

Ahora se construye una curva que tiene utilidad práctica en el tratamiento de imágenes. Esta curva puede construirse también a partir de otras configuraciones iniciales. Entre estos conjuntos existe una discordancia entre su tamaño real y su configuración espacial; es decir, su disposición en el

espacio. Por ello se consideró necesario establecer una medida adecuada a su tamaño, por una parte y por otra estudiar su forma y propiedades geométricas.

Una curva con propiedades interesantes desde el punto de vista matemático es la curva de Helge von Koch; a) no es posible trazar una tangente en un punto de su perímetro; b) la longitud entre dos puntos cualesquiera de su perímetro es infinita; c) la curva limita en su interior con un área finita.

Una explicación para esta curva: se construye comenzando con un segmento rectilíneo, que sin pérdida de generalidad supondremos de longitud uno. En un primer paso, se divide en tres partes iguales y se sustituye la central por un triángulo equilátero sin la base. Se obtiene así una figura formada por cuatro segmentos de longitud $\frac{1}{3}$. En un segundo paso se repite el proceso anterior con cada uno de los cuatro segmentos, obteniéndose una figura con 16 segmentos de longitud $\frac{1}{9}$. Este proceso se itera, y en el límite se obtiene la curva de Koch.

En el n -ésimo paso se obtiene una curva formada por 4^n segmento de longitud 3^{-n} , por lo que su longitud total es $\left(\frac{4}{3}\right)^n$. Como $\frac{4}{3} > 1$, la curva de Koch tiene longitud infinita; es decir, no es rectificante. La curva de Koch es un objeto autosemejante: es la unión de cuatro copias de sí misma reducidas a un tercio de su tamaño original. De cada uno de los cuatro segmentos que constituye la curva se obtiene otra semejante con razón de semejanza $\frac{1}{3}$, luego $N = 3, r = \frac{1}{3}$. De manera que para que la curva no cerrada de von Koch de lado 1 constituida por 4 curvas de lado $\frac{1}{3}$, su dimensión fractal es

$$D = \frac{\ln(N)}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\ln(4)}{\ln\left(\frac{1}{1/3}\right)} = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \cong 1,26181.$$

Las propiedades son: a) la poligonal K_i tiene longitud $\frac{4^i}{3}$ y está formada por segmentos de tamaño $\frac{1}{3^i}$, $\forall i \in \mathbb{N}$; b) la curva de Koch es continua y converge uniformemente; c) no es diferenciable en ningún punto.

DEDUCCIÓN DE LAS DIMENSIONES

Una de las características de los objetos fractales es la autosemejanza. Pero aquí, se necesita una definición mucho más precisa. Una semejanza en el plano es una composición de: una dilatación, una traslación, una rotación y una reflexión. Es una transformación que conserva la forma y las proporciones, pero que puede variar el tamaño, la posición y la orientación. En coordenadas cartesianas se expresa como.

$$S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm s & 0 \\ 0 & \pm s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

donde $s > 0$ es el factor de dilatación, θ es el ángulo de rotación y (a, b) es el vector de traslación.

Los signos $\mp$ se toman dependiendo si hay o no reflexiones, luego nos apoyamos en las siguientes definiciones (Chamizo y Córdova, 1994).

Definición 1: un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ es autosemejante si existen semejanzas $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$, con factores de dilatación respectivos $s_i < 1$, $1 \leq i \leq n$, tales que, $B = S_1(B) \cup S_2(B) \cup S_3(B) \dots \cup S_n(B)$. Es decir, si B es la unión de n copias reducidas de sí mismo.

Como se acaba de ver, la autosemejanza no basta caracterizar los objetos fractales, es fundamental analizar su dimensión fractal. Se puede señalar que existe concepción intuitiva, para hacerla rigurosa desde un punto de vista matemático. Así, una de las características más impresionantes de los objetos fractales es que tiene dimensión fraccionaria, la cual va dar una idea de irregularidad y fragmentación del objeto.

En matemáticas las ideas son distintas, para asignar una dimensión a los fractales, no todas equivalentes. Las más utilizadas son la dimensión de Hausdorff, la de Minkowski y la de fractal. Todas dan el mismo resultado cuando se aplica a conjuntos autosemejantes.

Dimensión de Minkowski: para obtener la dimensión de Minkowski, se asume que se tiene un segmento rectilíneo de longitud L y que con centro en cada uno de sus puntos se traza una circunferencia de cada radio $\varepsilon > 0$ pequeño en comparación con L. El resultado es un óvalo cuya área es $A(\varepsilon) = 2L\varepsilon + \pi\varepsilon^2$. Si ε es pequeño, el segundo término es despreciable, y el área es

aproximadamente proporcional a ε . Tiene importancia aquí, el área del óvalo es proporcional a ε elevado a la potencia 1, y que 1 es precisamente la dimensión del segmento, de donde $1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\log A(\varepsilon)}{\log(\varepsilon)}$.

Por otro lado, asumiendo que se tiene una curva continua $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado $\varepsilon > 0$, el óvalo es el conjunto, $S(\gamma, \varepsilon) = \bigcup_{0 \leq t \leq 1} B(\gamma(t), \varepsilon)$, donde $B(P, r)$ es bola abierta de centro el punto $P \in \mathbb{R}^2$ y radio r . Ahora si la curva es fractal, los círculos cubrirán un área más pequeña, esto es por las irregularidades de la curva, y el óvalo tendrá un área proporcional a una potencia ε^d , de donde $d > 1$; precisamente, el exponente de esa potencia es la dimensión de Minkowski de la curva.

Definición 2: Sea $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva continua. Aquí su dimensión de Minkowski está dado por

$$d(\gamma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\log(\text{Área de } S(\gamma, \varepsilon))}{\log(\varepsilon)}.$$

Dimensión fractal: la forma como se obtuvo la dimensión de Minkowski, resulta ser una valiosa herramienta teórica; pero, hay una limitación en cuanto a la aplicación práctica para calcular la dimensión de fractales naturales. Para determinar la dimensión fractal de una curva, se prepara una serie de cuadrículas R_k cada vez más finas, de forma que el lado de la k -ésima sea la mitad del lado del anterior. Se superpone la cuadrícula sobre la curva y se calcula $N_c(k)$ que es igual al número de cuadrados de R_k que cortan a la curva. (Barnsley y Massopust, 2014). Si la curva fuese un segmento rectilínea, es claro que entonces $N(k)$ sería proporcional a 2^k : al reducir a la mitad el lado de la cuadrícula se duplicaría el número de cuadrados que lo cortan. El resultado es entonces $N_c(k) \sim 2^{dk}$, donde $d > 1$. Precisamente, el exponente d es la dimensión fractal.

Definición 3: Sea A un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$, y $N_c(k)$ el número de cuadrados del retículo plano de lado 2^{-k} que intersección no vacía con A . La dimensión fractal de A es

$$\delta(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(N_c(k))}{k},$$

para determinar de una manera práctica la dimensión de un fractal natural, es cierto que no se puede llegar al límite, pues a partir de un cierto k se estaría en una escala menor que la más pequeña de las potencias elementales. Lo que se hace es elegir un rango de k 's adecuado a los 4 objetos que se

examina, hallar experimentalmente $N_c(k)$ en ese rango, y aplicar una regresión lineal de los valores de k y $\log(N_c(k))$. el resultado es, la pendiente de la recta de regresión es una estimación de la dimensión fractal.

Dimensión de Homotecia. La dimensión fractal de una entidad cualquiera puede determinarse del siguiente modo $D = \frac{\ln(N)}{\ln(\frac{1}{p})}$, donde D es la dimensión fractal, N es la cantidad de unidades que forman

el objeto, I es la altura del objeto (proyección) y P es la altura de las unidades que forman el objeto.

Se hace notar como se manipula este resultado. Para una recta formada por $N = 3$ segmentos, se

tiene $I = 1, p = \frac{1}{3}$, luego $D = \frac{\ln(3)}{\ln(\frac{1}{1/3})} = 1$; por tanto, $D = 1$. Para un cuadrado formado por $N = 9$

cuadrícula, se tiene: $I = 1, P = \frac{1}{3}, N = 9$, por tanto, $D = \frac{\ln(9)}{\ln(\frac{1}{1/3})} = 2$, es decir, la dimensión es 2.

Para una sección de la curva de von Koch después de la primera iteración, se tiene $I = 1, p = \frac{1}{3}, N =$

4, Luego $D = \frac{\ln(4)}{\ln(\frac{1}{1/3})} = 1,26$ lo cual es una dimensión fractal. Por otro lado, el perímetro de cualquier

sección de la curva de von Koch, es infinita. Esto tiene sentido, en una iteración cero, el perímetro es

1, es decir $\left(\frac{4}{3}\right)^0$. En una primera iteración, el perímetro es $\frac{4}{3}$, es decir $\left(\frac{4}{3}\right)^1$. En una segunda iteración,

el perímetro es $\frac{16}{9}$, es decir $\left(\frac{4}{3}\right)^2$. Para una enésima iteración, el perímetro es $\left(\frac{4}{3}\right)^n$, entonces el

perímetro se hace infinita, cuando $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$.

Es importante observar entonces que una figura determinada puede tener una dimensión fractal independiente de la escala o resolución en la que se realizó el cálculo. Por señalar a una línea que se tomó como recta, cuya dimensión $D = 1$, cuando se mira con más detalle puede presentar espesor e irregularidades haciendo que D sea mayor que 1,

En cuanto a la dimensión de homotecia, cualquier objeto fractal de I, construido de pequeñas unidades de tamaño p , siendo N el número de unidades enteras que caben en él, podemos definir la dimensión de homotecia D de la siguiente forma,

$$N = \left(\frac{1}{p}\right)^D,$$

se toma logaritmo de neper en ambos miembros se obtiene $\ln(N) = D \cdot \ln\left(\frac{1}{p}\right)$, de donde la dimensión D es,

$$D = \frac{\ln(N)}{\ln\left(\frac{1}{p}\right)}.$$

Explicamos para objetos de dimensión entera. Para un segmento de longitud 1 constituido por 3 segmento de tamaño $\frac{1}{3}$ la dimensión sería,

$$D = \frac{\ln(N)}{\ln\left(\frac{1}{p}\right)} = \frac{\ln(3)}{\ln\left(\frac{1}{1/3}\right)} = 1,$$

para un cuadrado de lado 1 formado por 9 cuadrados de lado $\frac{1}{3}$ la dimensión sería,

$$D = \frac{\ln(9)}{\ln\left(\frac{1}{1/3}\right)} = 2,$$

mientras que para un cubo de lado de lado 1 formado por 27 cubos de lado $\frac{1}{3}$ la dimensión sería

$$D = \frac{\ln(27)}{\ln\left(\frac{1}{1/3}\right)} = 3,$$

como característica más impresionante que destacamos de los objetos fractales es que tienen dimensión fraccionaria, la cual confirma la idea de irregularidad y fragmentación del objeto.

DISCUSIÓN

Sobre la cuantificación de conjuntos: Lo cierto es que para objetos fractales no disponemos de bloques de unidad semejante. Para fijar ideas, cuando se magnifica de manera sucesiva un objeto euclidiano unidimensional, se encuentra segmentos rectilíneos. Sin embargo, al magnificar sucesivamente un objeto fractal, se encuentra objetos con niveles de complicación comparables a los del conjunto de partida.

Sobre conceptos de dimensión: Una de las razones fundamentales de la diversidad es la variedad de la naturaleza de los objetos fractales. Por otra parte, los diferentes conceptos son útiles, porque generan puntos de vista distintos. No necesariamente iguales, además se observa, que las cantidades

numéricas asociadas con los diversos conceptos no son necesariamente coincidentes, de forma que tiene ocasión de comparar las citadas cantidades cuando están referidas al mismo objeto.

Se designa en adelante con el símbolo D_E a la dimensión euclidiana. Para la dimensión topológica D_t , se considera como un número entero y positivo o cero. Para la dimensión de escala, se establece este concepto, válida únicamente para estructuras estrictamente autosemejante, se denota con el símbolo D_S .

Sobre la medida de conjuntos geométricos: El tamaño de un conjunto finito viene dado por el número de elementos que lo componen, biyección con $\{1, 2, 3, \dots\}$. Un conjunto infinito es aquel que puede ponerse en correspondencia uno a uno con uno de sus pares, quitando las partes impropias. Dos conjuntos infinitos tienen el mismo cardinal si existe una aplicación biyectiva entre sus elementos. Cuando un conjunto infinito tiene el mismo cardinal que los números naturales $\mathbb{N}$, se dice que es numerable.

Definición 4. Sea X un conjunto, una σ -álgebra de X es una familia A de subconjuntos de X verificando: 1) $X \in A$, 2) la unión de una cantidad finita o numerable de elementos de A también pertenece al conjunto A ; 3) la diferencia conjuntista de elementos de A pertenece al conjunto A ; 4) el complementario de un elemento de A o la intersección finita o numerable también pertenece al conjunto A .

Definición 5: Respecto de la medida. Sea X un conjunto, A σ -álgebra de X , con $m: A \rightarrow [0, \infty)$ una aplicación, es una medida si: a) $m(\emptyset) = 0$; b) es completamente aditiva, es decir, para cualquier familia finita o numerable $\{E_k\} \subset A$ disjuntos dos a dos talque $m(\bigcup_k E_k) = \sum_k m(E_k)$.

Los elementos de A son conjuntos medibles con 1) $A \subset B$ ambos medibles entonces $m(A) \leq m(B)$ y $m(B) = m(A) + m(B - A)$; 2) Si $m: A \rightarrow [0, \infty)$, verifica la propiedad anterior $m(\emptyset) = 0$ y sólo se cumple entonces que $m(\bigcup_k E_k) \leq \sum_k m(E_k)$, aquí m se llama medida exterior.

Para fijar ideas, si $X = \mathbb{N}$, A representa todos sus subconjuntos. La aplicación descrita que a cada subconjunto acotado le hace corresponder su número de elementos e infinito a los no acotados es una

medida y se llama medida 0-dimensional.

Otra idea, si $X = \mathbb{R}$, A σ – álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Para medir un conjunto A, se debe recubrir por una cantidad numerable de intervalos y se evalúa la suma de sus longitudes. El ínfimo de tales sumas entre todos los posibles recubrimientos se llamada medida de Lebesgue 1-dimensional del conjunto.

A diferencia de la medida 0-dimensional, la medida de Lebesgue no observa la cantidad de elementos del conjunto sino su ubicación en $\mathbb{R}$. En $\mathbb{R}^n$ se determinan el volumen n-dimensional de una caja como el producto de las longitudes de los intervalos que los definen. De manera similar el caso unidimensional, en $\mathbb{R}^n$ existe una σ – álgebra de Lebesgue n-dimensional a cuyos elementos se asigna medida de Lebesgue n-dimensional tomando el ínfimo de las sumas de los volúmenes para los recubrimientos con cantidades de numerables de cajas.

Sobre la complejidad. Por copia semejante de razón r de un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, se entiende el conjunto imagen obtenido al aplicar una homotecia de razón r compuesta con un movimiento isométrico (traslación y/o giro).

Un conjunto acotado en $\mathbb{R}^n$, diremos que es autosemejante de N copias y razón r si podemos expresarlo como unión disjunta de N copias semejantes de razón r . Al observar, los parámetros números de copias y razón no son únicos, un intervalo puede expresarlo en general como unión de k copias de razón $\frac{1}{k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

La dimensión de semejanza de un conjunto de N copias y razón r es el número $n = -\frac{\log(N)}{\log(r)}$, entonces la caja de $\mathbb{R}^n$, tiene dimensión n , de manera igual ocurre para cualquier conjunto de medida positiva. Algunas caracterizaciones:

Sobre la medida de Hausdorff: el concepto de dimensión de Hausdorff, está basado en un concepto previo de medida, afirmación válida, si se tiene en cuenta que uno de los problemas de los conceptos tradicionales de dimensión, consiste en discrepancias entre valores dimensionales y la medida de conjuntos.

Sea F un conjunto acotado de $\mathbb{R}^n$ y a) dos números reales $0 \leq D \leq n$, $\varepsilon > 0$; b) $V = \{V_i\}$ un recubrimiento finito o numerable de F con conjuntos de diámetro $d_i \leq \varepsilon$, $F \subset \bigcup_i V_i$ donde, $d_i = \sup\{|x - y| : x, y \in V_i\}$, se construye las sumas, $S_H(\varepsilon, D) = \sum_i D_i^D$ y, considerando todos los posibles recubrimientos V , se calcula $\inf\{S_H(\varepsilon, D)\}$. Cuando ε disminuye, el valor de $\inf\{S_H(\varepsilon, D)\}$ crece, porque decrece el número de recubrimientos disponibles, de forma que es posible escribir $H^D(F) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf\{S_H(\varepsilon, D)\}$. Esta es la medida de Hausdorff D -dimensional del conjunto F y su valor puede ser finito o infinito.

Sobre la dimensión de Hausdorff: de acuerdo con esto, podemos buscar

$$D_H(F)_{\inf} = \sup\{D : H^D(F) = \infty\}$$

$$D_H(F)_{\sup} = \inf\{D : H^D(F) = 0\}$$

Estos valores existen para cualquier conjunto, son iguales y constituyen la dimensión de Hausdorff del conjunto F . Conviene subrayar que la medida de Hausdorff de F para $D = D_H(F)$ puede ser 0, ∞ o cualquier número positivo. La dimensión de Hausdorff satisface las propiedades elementales:

- Si $F \subset \mathbb{R}^n$, entonces $D_H(F) \leq n$;
- Si F es un conjunto finito o numerable, $D_H(F) = 0$,
- Si F es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces $D_H(F) = n$.

Se cumplen las propiedades de monotonía y estabilidad numerable.

- Si $F_1 \subset F_2$ entonces $D_H(F_1) \leq D_H(F_2)$, para cualquier sucesión de conjuntos $X_1, X_2, X_3, \dots$, así $D_H(\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j) = \sup_{j \geq 1} D_H(X_j)$.
- Para $F \subset \mathbb{R}^n$, sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación de Lipschitz de constantes $c > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|, \forall x, y \in F$, entonces $\dim_H(f(F)) \leq \dim_H(F)$. Si f es una isometría, existe invariancia: $\dim_H(f(F)) = \dim_H(F)$.

Sobre la relaciones entre D_T, D_S, D_H y D_B : Sea F el conjunto de los números racionales de $[0, 1]$.

Se tiene: $D_H(F) = 0$ y $D_B(F) = 1$. Sea C el conjunto triádico de Cantor y K la curva de van Koch triádica:

$$D_S(E) = D_H(E) = D_B(E) = \frac{\log(2)}{\log(3)},$$

$$D_S(K) = D_H(K) = D_B(K) = \frac{\log(2)}{\log(3)} = \frac{\log(16)}{\log(9)} = \frac{\log(64)}{\log(27)} = 1,26185951.$$

donde 64 es número de copias y 27 el factor de ampliación. De la misma forma para la alfombra de Sierpinski su dimensión Hausdorff es $D_H = \frac{\log(64)}{\log(9)} = 1,89378926$, mientras que del triángulo de

Sierpinski se tiene como $D_H = \frac{\log(9)}{\log(4)} = \frac{\log(243)}{\log(32)} = 1,89378926$.

Finalmente, estas relaciones son ciertas para una amplia clase de conjuntos que incluyen muchos modelos fractales. Para el caso más general: si F es estrictamente autosemejante, con dimensión, $D_S =$

$\frac{\log(n)}{\log(k)}$, entonces F tiene dimensión H y dimensión B, y las tres cantidades son iguales. En general se

cumple $D_T(F) \leq D_H(F) \leq D_B(F) \leq D_E(F) = n$. Sin embargo, puede ser $D_S(F) > n$.

CONCLUSIONES

Los resultados de este trabajo, no afirma en general, que el mundo entero se rija por las reglas de los fractales, pero si considera que la ciencia del caos y los fractales realizan un gran aporte al mundo de la ciencia, no solo en conocimientos concretos, sino como una nueva forma de concebir las cosas y resolver los problemas que nos plantea nuestra diaria observación.

La discusión del concepto de fractal, permiten afirmar que existen diferencias fundamentales entre Geometría Euclidiana y la Geometría Fractal, básicamente en su dimensión y la forma de su generación que es por iteración. La representación y el estudio de las diferentes curvas y conjuntos así lo demuestra.

Es fundamental observar que la geometría fractal está presente en la naturaleza, esto permite afirmar que estudiando modelos contruidos con fractales podemos obtener resultados aproximados a los que se obtendría usando modelos reales, de manera que permitan: conocer, representar y organizar el espacio, siendo nuestro objetivo describir la naturaleza lo más preciso posible.

REFERENCIAS

- Barletta, B. J. y Barbosa-Cánovas, G. V. (1993). *Fractal analysis to characterize ruggedness changes in tapped agglomerated food powders*. Journal of Food Science 56: A publication of the Institute of Food Technologists.
- Barnsley, M.F. y Massopust E. R. (2014). *Bilinear fractal interpolación ando box dimensión, Journal of approximation theory*. Obtenido de:
<https://doi.org/10.1016/j.jat.2014.10.014>
- Chamizo, F. y Córdova, A. (1994). *The fractal dimensión of a family of Riemann's graphs*. C.R. Acad. Sci. Paris serie I 320.
- Chanona, J.; Alamilla, L. y Gutiérrez, G. V. (2001). *Caos y geometrias de fractales, herramientas auxiliares para evaluar la complejidad del entorno biológico*. Biotecnología 5(3).
- De Guzmán, M.; Martín, M.; Morán M. y Reyes, M. (2000). *Estructuras fractales y sus aplicaciones*, España: Edit. Labor.
- Demko, S.; Hodges, L. y Naylor, B. (1982). *Construcción of Fractal Objects with Iterated Funtion Systems*, Computer graphics, Search ACM Digital Library.
- Eceizabarrena Daniel. (2021). *Una nueva faceta geométrica de la función no diferenciable de Riemann*. La Gaceta de la RSME, Vol. 24 (2) pp 273 – 300. Obtenido de
<https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=1633>
- Gustavo, N. (2009). *Iteración y Fractales*. Editorial Universidad Nacional de Colombia. Obtenido de: <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/77891>
- Kenkel, N. C. y Walker, D. J. (1996). *Fractals in the biological*. Departament of Botany, University of Manitoba, Canadá.
- Mandelbrot, B. (2003). *La Geometría Fractal de la Naturaleza*, Tusquets, Editores, Barcelona.
- Schoreder, Manfred. (1991). *Fractal, Chaos, Power Laws*. W. H. Freeman and Co, New York.

- Smale, S. y Hirsch, M. (1974). *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*, Academic Press. New York.
- Tang, P. y Raper, J. A. (2002). *Modellin the setting vehaviour of fractal aggregates-a review*. Powder Technology 123.
- Yano, T. (1996). *Fractal nature of food materials*. Bioscience, Biotechnology and Biochemistry 60: 739-744. Obtenido de: <https://doi.org/10.1271/bbb.60.739>