

## Análisis de Rigidez de una Viga con Sección Variable

**Marcos Josue Rupay Vargas**<sup>1</sup>

[mrupay@uniscjsa.edu.pe](mailto:mrupay@uniscjsa.edu.pe)<sup>2</sup>

<https://orcid.org/0000-0002-7891-1838>

Universidad Nacional Intercultural de la Selva  
Central Juan Santos Atahualpa  
Perú

**Jhorman Dennys Llanos Cerron**

[jhormankan@gmail.com](mailto:jhormankan@gmail.com)

<https://orcid.org/0009-0005-7818-5150>

Universidad Nacional Intercultural de la Selva  
Central Juan Santos Atahualpa  
Perú

**Carlos Bryan Gonzales Huaman**

[logbryan5@gmail.com](mailto:logbryan5@gmail.com)

<https://orcid.org/0009-0007-6780-6788>

Universidad Nacional Intercultural de la Selva  
Central Juan Santos Atahualpa  
Perú

**Hanz Smith Chavez Paucarcaja**

[hancitochavezpaucarcaja@gmail.com](mailto:hancitochavezpaucarcaja@gmail.com)

<https://orcid.org/0009-0009-1320-5375>

Universidad Nacional Intercultural de la Selva  
Central Juan Santos Atahualpa  
Perú

**Piero Anghelo Cordova Camarena**

[cordovaanghelo04@gmail.com](mailto:cordovaanghelo04@gmail.com)

<https://orcid.org/0009-0004-6521-3696>

Universidad Nacional Intercultural de la Selva  
Central Juan Santos Atahualpa  
Perú

**Diana Isabel Valerio Cordova**

[dianaisabelvalerio@gmail.com](mailto:dianaisabelvalerio@gmail.com)

<https://orcid.org/0009-0009-4503-3395>

Universidad Nacional Intercultural de la Selva  
Central Juan Santos Atahualpa  
Perú

### RESUMEN

El propósito de este trabajo es analizar la rigidez de una viga de sección transversal variable mediante integración, y dado que la sección transversal cambia a lo largo de su longitud, el análisis de rigidez se vuelve más complicado para el cálculo de la matriz de rigidez, ya que es fundamental conocer su comportamiento bajo cargas externas La capacidad de resistir deformaciones. En esta evaluación, la matriz de rigidez relacionará los desplazamientos y fuerzas en los nodos de la viga analizados, lo que permitirá resolver el sistema de ecuaciones resultante para los desplazamientos y fuerzas en la viga bajo cargas externas. Cabe señalar que este procedimiento requiere conocimientos de mecánica de materiales y métodos numéricos. En este trabajo, el análisis de rigidez de vigas de sección transversal variable se realizará por integración, ya que la integración es una herramienta poderosa para diseñar y evaluar estructuras complejas con diferentes secciones transversales a lo largo de su longitud, como puentes o torres. El utilizado en este estudio ayudará a obtener resultados más precisos, la aplicación práctica del método se da mediante el software SAP2000, ya que este programa genera una toma de datos precisa y eficiente en cuanto al tiempo de cálculo.

**Palabras clave:** *Matriz de Rigidez; Seccion Variable; Integrales*

<sup>1</sup> Autor principal

<sup>2</sup> Correspondencia: [mrupay@uniscjsa.edu.pe](mailto:mrupay@uniscjsa.edu.pe)<sup>2</sup>

## Stiffness analysis of a Beam with Variable Section using Integrals

### ABSTRACT

The purpose of this work is to analyze the stiffness of a beam of variable cross section by integration, and since the cross section changes along its length, the stiffness analysis becomes more complicated for the calculation of the stiffness matrix, since it is essential to know its behavior under external loads The ability to resist deformations. In this evaluation, the stiffness matrix will relate the displacements and forces in the analyzed beam nodes, which will allow solving the resulting system of equations for the displacements and forces in the beam under external loads. It should be noted that this procedure requires knowledge of mechanics of materials and numerical methods. In this work, the stiffness analysis of beams of variable cross section will be performed by integration, since integration is a powerful tool for designing and evaluating complex structures with different cross sections along their length, such as bridges or towers. The one used in this study will help to obtain more precise results, the practical application of the method is given through the SAP2000 software, since this program generates a precise and efficient data collection in terms of calculation time.

**Keywords:** *Stiffness Matrix; Variable Section; Integral*

*Artículo recibido 05 Mayo 2023*

*Aceptado para publicación: 05 Junio 2023*

## INTRODUCCIÓN

En este estudio se desarrollará un método preciso y eficiente para determinar la rigidez de vigas de sección variable. A medida que cambia la sección de la viga, también cambia la rigidez, lo que dificulta el análisis tradicional de vigas. Es importante abordar este tema en lo que se refiere a la ingeniería estructural. Las vigas de perfil variable son comunes en muchas aplicaciones, como puentes arqueados, miembros estructurales compuestos y estructuras con formas complejas. Es importante conocer y calcular la rigidez de estas vigas, ya que es fundamental para garantizar la seguridad, estabilidad y eficiencia de la estructura. El marco teórico utilizado en este trabajo se basa en la teoría de vigas y el método de elementos finitos, que proporciona un marco sólido para el análisis estructural y el modelado de vigas. El método de los elementos finitos permite discretizar la viga en elementos más pequeños, lo que a su vez permite tener en cuenta la variación de la sección a lo largo de su longitud. El uso de integrales en la derivación de la ecuación de rigidez es importante para tener en cuenta las diferentes propiedades de cada pieza.

Los principales supuestos y requisitos previos de este tema se basan en la relación entre la rigidez de la viga y su capacidad para resistir la deformación bajo cargas externas. Se utilizan conceptos clave como rigidez, sección transversal variable, elemento finito, integral, desplazamiento y fuerza. Los autores asociados en este campo incluyen a Timoshenko, Bathe y Cook, quienes hicieron importantes contribuciones a la teoría de vigas y al método de elementos finitos.

Dado que existen registros previos sobre el análisis de vigas de sección transversal variable, sus estudios se abordaron utilizando métodos numéricos o métodos analíticos aproximados; Por ejemplo, se han propuesto métodos basados en interpolación, optimización y aproximación polinomial para calcular la rigidez de vigas de secciones transversales variables, y estos estudios han hecho contribuciones valiosas, pero aún se necesitan desarrollar métodos más precisos y eficientes para considerar cuidadosamente secciones variables.

En resumen, la información presentada en este artículo se enfoca en el análisis de matrices de rigidez de vigas de sección transversal variable usando análisis integral para aplicar la teoría de vigas y soluciones de

elementos finitos al desafío de calcular la rigidez de estas vigas para mejorar la comprensión y evaluación. cálculo estructural y evaluación de precisión de secciones variables.

## **METODOLOGÍA**

El siguiente enfoque se utilizará para analizar la matriz de rigidez de una viga de sección transversal variable mediante integración:

Revisión Bibliográfica: Porque se realizará una revisión exhaustiva de la literatura científico-técnica relacionada con el análisis y cálculo de la rigidez de vigas de sección variable mediante integrales, así como estudios previos, métodos y técnicas utilizadas por diversos autores en este trabajo teórico.

Antecedentes o fundamentos teóricos: los antecedentes teóricos de este artículo cubren los conceptos básicos de la teoría de vigas, como las ecuaciones de equilibrio, las condiciones de contorno y las fuerzas internas. También explicará la importancia de considerar cambios en la sección transversal a lo largo de la viga y cómo esto afecta la rigidez.

Desarrollo del modelo de elementos finitos: este modelo se usará para dividir la viga en elementos más pequeños y tener en cuenta los cambios en la sección transversal y crear ecuaciones de equilibrio para cada elemento finito, así como ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de la viga bajo diseño, estas ecuaciones incorporarán las propiedades variables de la sección integrando la función de rigidez.

### **Ilustración 1.**

*Ilustración de una viga de Sección Variable*



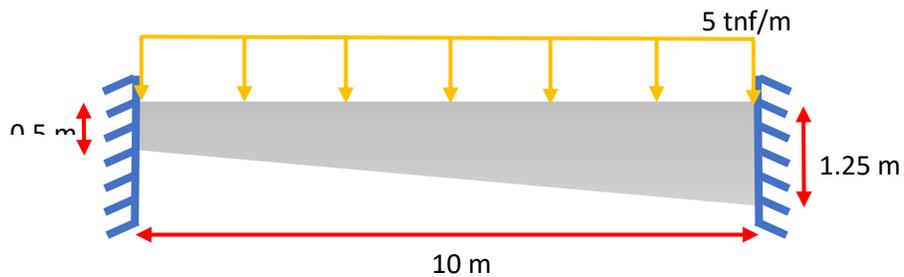
*Nota.* Elaboración propia

Cálculo de la matriz de rigidez: Se utilizará un cálculo de la matriz de rigidez global para vigas con secciones transversales variables, lo que significa integrar las ecuaciones diferenciales en cada elemento finito y sumar las contribuciones de cada elemento para obtener la matriz de rigidez completa, se presta especial atención. al término de la sección de Integración ya las propiedades de las variables en cada punto

de integración.

Implementación práctica: Para la implementación práctica del método desarrollado se utilizará el software profesional de análisis estructural SAP2000 24 y elementos finitos, se realizarán ejemplos numéricos y métodos de simulación para validar y probar la efectividad en el análisis de vigas de sección variable.

Comparación con estudios previos: La comparación de resultados obtenidos usando el método de integrales con los estudios previos en el campo serán citados en los trabajos relevantes y se discutirán las ventajas y limitaciones de cada enfoque, también se destacarán las contribuciones y novedades del método propuesto.

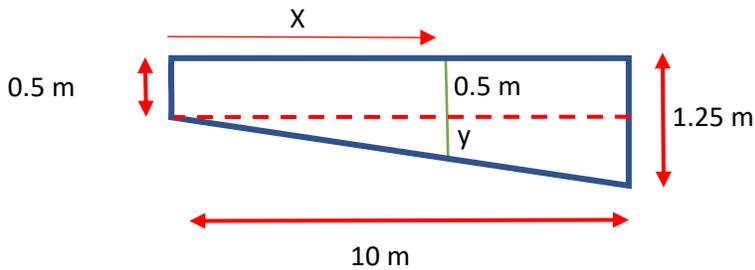


Comparación con estudios previos: Los artículos relacionados citarán comparaciones de métodos de integración con resultados de investigaciones previas en el campo, discutirán las fortalezas y limitaciones de cada método y presentarán las contribuciones y novedades de los métodos propuestos.

Para completar la metodología de trabajo, se incluirá una completa revisión bibliográfica y explicación de las bases teóricas, desarrollo del modelo de elementos finitos, cálculo de la matriz de rigidez e implementación práctica mediante software dedicado. También se compararán los resultados con estudios previos y se discutirá la contribución del método propuesto al análisis de vigas de sección transversal variable.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

$$b = 0.4 \text{ m}$$

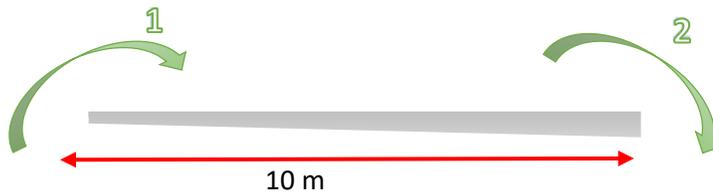


$$\frac{y}{x} = \frac{0.75}{10} \leftrightarrow y = \frac{3x}{40}$$

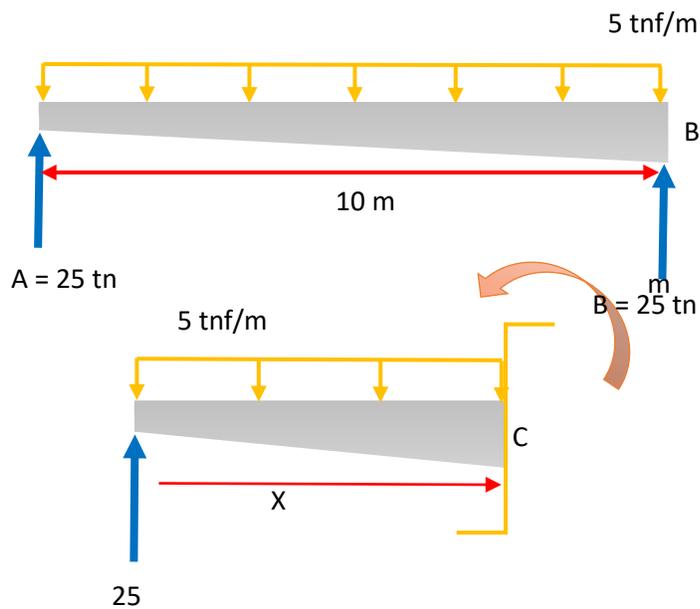
$$h_{variable} = 0.5 + y$$

$$I_3 = \frac{0.4 * \left(0.5 + \frac{3x}{40}\right)^3}{12}$$

### 1° PASO: SISTEMA Q-D:



### 2° PASO: SISTEMA PRIMARIO



$$\sum_B = 0$$

$$A * (10) - 50 * (5) = 0$$

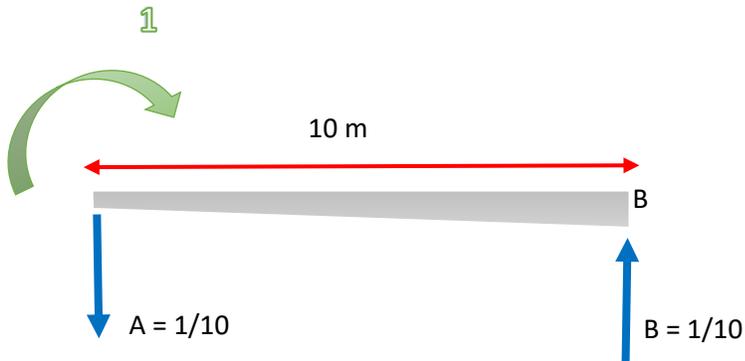
$$A = 25 \quad ; \quad B = 25$$

$$\sum_C = 0$$

$$-25X + 5X * \left(\frac{X}{2}\right) + m = 0$$

$$m = 25X - \frac{(5X)^2}{2}$$

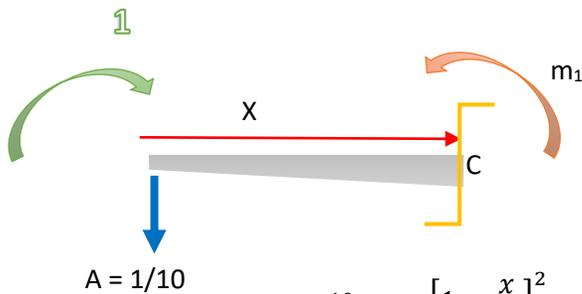
**3° PASO: SISTEMA COMPLEMENTARIO**  
**D1 = 1**



$$\sum_B = 0$$

$$-1 + A * (10) = 0$$

$$A = \frac{1}{10} \quad ; \quad B = \frac{1}{10}$$



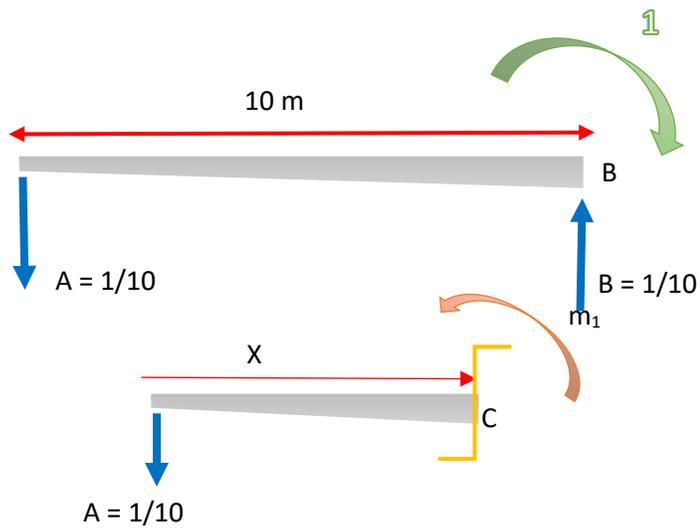
$$\sum_C = 0$$

$$-1 + X * \left(\frac{1}{10}\right) + m_1 = 0$$

$$m_1 = 1 - \frac{x}{10}$$

$$f_{11} = \int_0^{10} \frac{\left[1 - \frac{x}{10}\right]^2}{E * \frac{0.4 * \left(0.5 + \frac{3x}{40}\right)^3} {12}} dx = \frac{384.9179}{E}$$

**D2 = 1**



$$\sum_B = 0$$

$$-1 + A * (10) = 0$$

$$A = \frac{1}{10} \quad ; \quad B = \frac{1}{10}$$

$$\sum_C = 0$$

$$X * \left(\frac{1}{10}\right) + m_1 = 0$$

$$m_1 = -\frac{x}{10}$$

$$f_{22} = \int_0^{10} \frac{\left[-\frac{x}{10}\right]^2}{E * \frac{0.4 * \left(0.5 + \frac{3x}{40}\right)^3}{12}} = \frac{96.9179}{E}$$

$$f_{12} = f_{21} = \int_0^{10} \frac{\left[1 - \frac{x}{10}\right] * \left[-\frac{x}{10}\right]}{E * \frac{0.4 * \left(0.5 + \frac{3x}{40}\right)^3}{12}} = \frac{-95.08215}{E}$$

**MATRIZ DE FLEXIBILIDAD:**

$$f = \begin{vmatrix} 384.9179 & -95.08215 \\ -95.08215 & 96.9179 \end{vmatrix} * \frac{1}{E}$$

**MATRIZ DE RIGIDEZ:**

$$k = f^{-1} = \begin{vmatrix} 0.003429 & 0.003364 \\ 0.003364 & 0.01362 \end{vmatrix} * E$$

#### 4° PASO: VECTOR DE DEFORMACIÓN

$$D_{10} = \int_0^{10} \frac{\left[1 - \frac{x}{10}\right] * \left[25X - \frac{(5X)^2}{2}\right]}{E * \frac{0.4 * \left(0.5 + \frac{3x}{40}\right)^3}{12}} = \frac{15082.14622}{E}$$

$$D_{20} = \int_0^{10} \frac{\left[-\frac{x}{10}\right] * \left[25X - \frac{(5X)^2}{2}\right]}{E * \frac{0.4 * \left(0.5 + \frac{3x}{40}\right)^3}{12}} = \frac{-8688.39033}{E}$$

$$D = \begin{vmatrix} 15082.14622 \\ -8688.39033 \end{vmatrix} * \frac{1}{E}$$

#### 5° PASO: FUERZAS INTERNAS (Momentos de Empotramiento)

$$-R = K * D$$

$$-R = \begin{vmatrix} 0.003429 & 0.003364 \\ 0.003364 & 0.01362 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 15082.14622 \\ -8688.34033 \end{vmatrix}$$

$$R = \begin{vmatrix} -22.4889 \\ 67.5994 \end{vmatrix}$$

#### ILUSTRACIONES, TABLAS, FIGURAS.

##### Figura 1.

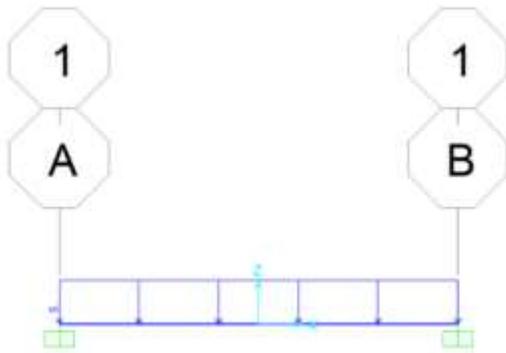
*Figura de datos, con las consideraciones de Sección Variable*



*Nota.* Elaboración propia. haciendo uso del software SAP2000

**Figura 2.**

*Figura con los datos del Modelo Matemático de la Sección Variable*



*Nota.* Elaboración propia, haciendo uso del software SAP2000

**Figura 3.**

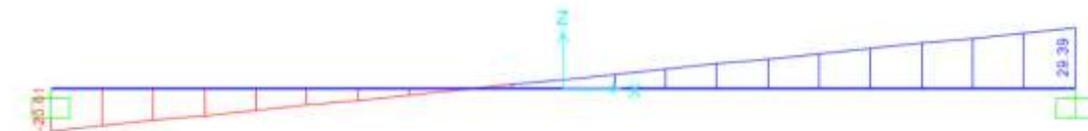
*Figura con los de datos, consideraciones del Diagrama de Momento Flector (DMF)*



*Nota.* Elaboración propia, haciendo uso del software SAP2000

**Figura 4.**

*Figura con los de datos, consideraciones del Diagrama de Fuerza Cortante (DFC)*



*Nota.* Elaboración propia, haciendo uso del software SAP2000 24

## CONCLUSIONES

El análisis de vigas con sección variable es un tema relevante en ingeniería estructural debido a su aplicabilidad en diversas estructuras complejas, como puentes curvados y elementos estructurales compuestos.

El uso de integrales en el análisis de rigidez de vigas con sección variable permite considerar las propiedades variables de la sección a lo largo de su longitud, lo que mejora la precisión de los resultados.

El método de los elementos finitos es una herramienta eficaz para discretizar la viga en elementos más pequeños y tener en cuenta las variaciones de la sección.

La implementación práctica del método propuesto, utilizando software especializado como SAP2000, ha demostrado agilizar el proceso de análisis y proporcionar resultados eficientes. Al comparar los resultados obtenidos mediante el uso de integrales con los obtenidos mediante el método de los elementos finitos, se observa una pequeña discrepancia en las fuerzas internas calculadas. Los valores obtenidos a través del uso de integrales fueron de -22.4889 y 67.5994, mientras que utilizando el método de elementos finitos se obtuvieron valores de -20.61 y 66.03. Aunque se puede apreciar un pequeño margen de error, los resultados obtenidos mediante ambos métodos son consistentes y brindan una base sólida para el análisis de rigidez de vigas con sección variable.

#### **LISTA DE REFERENCIAS**

Moreano Cevallos, R., & Criollo Sandoval, D. (2018). CÁLCULO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO DE SECCIÓN VARIABLE CON DIFERENCIAS FINITAS. *Ciencia*, 17(2).

Fernando Monroy-Miranda (mayo del 2002). Aplicación numérica para obtener la rigidez elástica de barras con sección variable, artículo publicado en la revista *Ingeniería Investigación y Tecnología*.

Arnulfo Luévanos Rojas (18 de diciembre del 2014) Modelado para vigas de sección transversal "I" sometidas a una carga uniformemente distribuida con cartelas rectas; artículo publicado en *Ingenier. Mecáni. Tecnol. Desarroll* vol.5 no.2 México mar.2015.

J. Darío Aristizábal-Ochoa, Estructuras de vigas sobre suelos elásticos de rigidez variable, artículo publicado en *Rev. Int. de Desastres Naturales, Accidentes e Infraestructura Civil*. Vol. 3(2) 157.

Francisco Velázquez S., Arnulfo Luévanos R., Sandra López C., (octubre,2021) Modelado para trabes de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas: Part1, artículo publicado en *Comp. y Sist.* vol.23 no.2 Ciudad de México abr./jun. 2019 Epub 10-Mar-2021.

G. Bravo y A. Martin (1989) Tratamiento de elementos rectos y curvos de sección variable por métodos matriciales, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería* Vol. 5,1,3-38(1989).

Climent Molins, Pere Roca y Alex H. Barbat, (1995). Una Formulación matricial generalizada.part 2:

Análisis Dinámico publicado en la Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 11, 1, 23-36(1995), portal de la Universitat Politècnica de Catalunya Barcelonatech.

A. D. Otero, F. L. Ponta, P. M. Jacovkis (noviembre, 2005) UN MODELO DE RIGIDEZ DE VIGAS PARA SECCIONES NO HOMOGENEAS Y GRANDES DESPLAZAMIENTOS, publicado por la edit. A. Larreteguy, Buenos Aires, Argentina.

Víctor H. Cortínez, Raúl E. Rossi (1998). DINÁMICA DE VIGAS DE SECCIÓN ABIERTA DE PARED DELGADA DEFORMABLES POR CORTE SUJETAS A UN ESTADO INICIAL DE TENSIONES, publicado en Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 14,3, 293-316(1998).

Ing. Jorge Iván Valdés Cerón (noviembre,2021) Modelado, análisis y evaluación experimental de vigas de sección transversal variable que producen agujeros negros acústicos, tesis para la obtención del grado de Maestro de Ciencias.

S. Monleon (1993). TOPICOS DEL ANALISIS 'UNIDIMENSIONAL DE ESTRUCTURAS. PARTE 1. Vigas y arcos, publicado en la Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 9, 2, 161-179(1993).

Josep Maria Pons, Milad Soltanalipour (08 de octubre del 2021) Métodos de Clapeyron y Cross para el análisis de vigas de inercia variable, publicado por la fundación Dialnet y la universidad de la Rioja.

Eber Alberto Godínez Domínguez, Isidro Velázquez Gutiérrez, Arturo Tena Colunga (junio 2019) EFECTO DE LA CUANTÍA DE REFUERZO LONGITUDINAL EN LA RIGIDEZ EFECTIVA DE SECCIONES DE VIGAS DE CONCRETO REFORZADO.

Harold Nolberto Diaz Giraldo (Medellín, Colombia 2017) Formulación matricial exacta de pórticos planos con sección transversal variable, caso estático. Universidad Nacional de Colombia Facultad de Minas, Departamento de Ingeniería Civil.

Carlos A. Rossit, Santiago Maiz y Valeria Y. González (octubre 2007) COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE VIGAS DE SECCIÓN VARIABLE CON MASAS ADOSADAS.