

Método de la rigidez aplicada en armaduras planas frente al software sap2000

Marcos Josue Rupay Vargas¹

mrupay@uniscjsa.edu.pe

<https://orcid.org/0000-0002-7891-1838>

Universidad Nacional Intercultural de la Selva Central Juan Santos Atahualpa Chanchamayo, Perú

Romeo Tucto Santiago

73047197@uniscjsa.edu.pe

<https://orcid.org/0000-0003-4788-9583>

Universidad Nacional Intercultural de la Selva Central Juan Santos Atahualpa Chanchamayo, Perú

Nilver Jhon Tito Crispin

72254790@uniscjsa.edu.pe

<https://orcid.org/0000-0001-5047-2856>

Universidad Nacional Intercultural de la Selva Central Juan Santos Atahualpa Chanchamayo, Perú

Gabriel Ernesto Ramos Carhuancho

71230967@uniscjsa.edu.pe

<http://orcid.org/0000-0001-5509-2481>

Universidad Nacional Intercultural de la Selva Central Juan Santos Atahualpa Chanchamayo, Perú

Alex Junior Uquiche Molina

73949271@uniscjsa.edu.pe

<http://orcid.org/0000-0002-3097-5314>

Universidad Nacional Intercultural de la Selva Central Juan Santos Atahualpa Chanchamayo, Perú

RESUMEN

En el presente artículo, nuestro objetivo fue determinar la respuesta estructural de la armadura plana mediante el método de la rigidez y el software SAP2000. El alcance de nuestra investigación es descriptivo-comparativo, porque se demuestra que el método de la rigidez aplicada en armaduras planas nos proporciona las mismas respuestas estructurales que el software SAP2000, la metodología empleada es descriptivo, se estableció un sistema Q-D para generar la matriz de rigidez de dicha estructura, en base a ello se hallaron los vectores de desplazamientos, las fuerzas internas y las reacciones. Dentro del desarrollo, las armaduras planas se analizaron bajo distintos sistemas de cargas: fuerzas puntuales, deformación unitaria (variación de temperatura y error de montaje), asentamiento, apoyo inclinado y apoyo elástico, luego se obtuvieron las respuestas estructurales que fueron comprobados mediante el software SAP2000, donde finalmente se llegó a la conclusión que la resolución de armaduras planas aplicando el método de la rigidez nos resulta las mismas respuestas empleando el software SAP2000.

Palabra clave: *análisis estructural; armaduras bidimensionales; método de desplazamientos.*

¹ Autor principal.

Correspondencia: mrupay@uniscjsa.edu.pe

Stiffness method applied in flat reinforcements against sap2000 software

ABSTRACT

In this article, our objective was to determine the structural response of the flat reinforcement by means of the stiffness method and the SAP2000 software. The scope of our research is descriptive-comparative, because it is shown that the method of applied stiffness in flat reinforcement provides us with the same structural responses as the SAP2000 software, the methodology used is descriptive, a Q-D system was established to generate the matrix of rigidity of said structure, based on it the displacements, the internal forces and the reactions were found. Within the development, the flat reinforcements were analyzed under different load systems: punctual forces, unitary deformation (temperature variation and assembly error), settlement, inclined support and elastic support, then the structural responses were obtained and verified by means of the software. SAP2000, where it was finally concluded that the resolution of flat reinforcements applying the stiffness method gives us the same answers using the SAP2000 software.

Keywords: *structural analysis; two-dimensional reinforcement; displacement method.*

Artículo recibido 05 mayo 2023

Aceptado para publicación: 05 junio 2023

INTRODUCCIÓN

(Hurtado, Jorge Eduardo, 2013). La importancia del método de la rigidez aplicada en armaduras planas es que nos facilita encontrar el vector de desplazamientos, las fuerzas internas y las reacciones de una manera acertada para poder así comprobar ante cualquier software de estructuras, para la cual es importante considerar a cada una de las barras que la componen como elementos finitos, para así establecer el sistema Q-D y de ahí obtener la matriz de rigidez de cada barra, para luego formular la matriz estructural de la armadura y por consiguiente obtener el vector de desplazamientos, las fuerzas internas y las reacciones.

Morocho Huamán, L.A. y Calderón Bernal, B.M. (2020). En su tesis titulada “Desarrollo del programa de análisis lineal y no lineal de estructuras en dos dimensiones por el método de los desplazamientos”. Llegaron los autores a la conclusión, que el método de los desplazamientos o también llamado método de la rigidez aplicada a armaduras planas generó las mismas respuestas estructurales que el software SAP2000.

Se justifica que el desarrollo de este artículo es importante y tiene como propósito dar a conocer a los estudiantes de ingeniería civil y a todos los lectores, la aplicación del método de la rigidez con la comprobación del software SAP2000, por esa razón es necesario entender la metodología general que se emplea.

En el presente artículo, el objetivo general será aplicar el método de la rigidez en armaduras planas en diferentes situaciones para poder así determinar la respuesta estructural de la armadura sometido a fuerzas puntuales, deformación unitaria, asentamiento, y apoyos inclinados como elásticos, los cuales también serán analizados con el software SAP2000 para verificar y contrastar los resultados estructurales obtenidos por el método de la rigidez.

METODOLOGÍA

La investigación es básica, ya que se buscará incrementar los conocimientos científicos. La metodología de esta investigación tiene un enfoque cuantitativo. El tipo de investigación según su alcance es descriptivo-comparativo, de diseño no experimental. Para la elaboración de este artículo se empleó libros, informes de investigación, artículos científicos y bases de datos.

Método de la rigidez aplicada en armaduras planas

Kassimali (2015) afirma que las armaduras planas son elementos que soportan cargas axiales de tensión si las fuerzas alargan al elemento o compresión si las fuerzas comprimen al elemento, asimismo, las armaduras se unen en sus puntos extremos mediante articulaciones sin fricción.

Sistema Q-D

- Se debe establecer dos grados de libertad por nodo a la armadura.
- Se descartará los grados de libertad que no generen fuerzas axiales, se obtendrá un vector de cargas Q.

$$Q = \begin{bmatrix} Q1 \\ Q2 \\ Q3 \\ \vdots \\ Qn \end{bmatrix}$$

Donde:

Q: vector de cargas

Vector de carga Q con deformación unitaria

Hibbeler (2012) afirma que si una barra de la armadura presenta deformación unitaria al vector de carga inicial, se le deberá aumentar el vector de carga Q con deformación unitaria.

$$Q_{\varepsilon} = E \cdot A \cdot \varepsilon_0 \cdot [-C \quad -S \quad C \quad S]^T \begin{cases} \varepsilon_0 = \alpha \cdot \Delta T \\ \varepsilon_0 = \frac{\Delta}{L} \end{cases}$$

Donde:

E: módulo de elasticidad

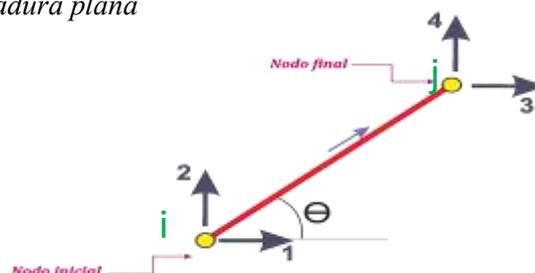
A: sección de barra

ε_0 : deformación unitaria

Matriz de una barra tipo armadura

- La matriz de rigidez de la barra debe ser simétrica.
- La diagonal principal no debe presentar elementos negativos.

Figura 1. Barra de una armadura plana



Nota. En la barra de la armadura se asigna dos grados de libertad por cada nodo. Tomado de (Rupay, 2021).

$$K = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \text{sen}\theta\cos\theta & -\cos^2\theta & -\text{sen}\theta\cos\theta \\ \text{sen}\theta\cos\theta & \text{sen}^2\theta & -\text{sen}\theta\cos\theta & -\text{sen}^2\theta \\ -\cos^2\theta & -\text{sen}\theta\cos\theta & \cos^2\theta & \text{sen}\theta\cos\theta \\ -\text{sen}\theta\cos\theta & -\text{sen}^2\theta & \text{sen}\theta\cos\theta & \text{sen}^2\theta \end{bmatrix}$$

Donde:

K: matriz de rigidez de la barra

L: longitud de la barra

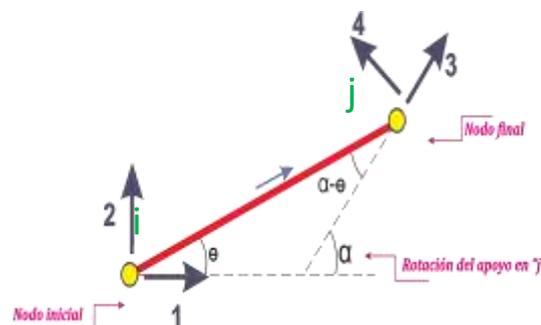
A: sección de barra

E: módulo de elasticidad

Matriz de una barra tipo armadura con apoyo rotado

Rupay (2022) manifiesta que para una barra de la armadura que se encuentra en un apoyo inclinado, se deberá hacer una rotación en el apoyo “j”.

Figura 2. Barra de una armadura plana con apoyo inclinado



Nota. En la barra de la armadura se asigna dos grados de libertad por cada nodo. Tomado de (Rupay, 2022).

$$K = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \text{sen}\theta\cos\theta & -\cos\theta\cos(\alpha - \theta) & \cos\theta\text{sen}(\alpha - \theta) \\ \text{sen}\theta\cos\theta & \text{sen}^2\theta & -\text{sen}\theta\cos(\alpha - \theta) & \text{sen}\theta\text{sen}(\alpha - \theta) \\ -\cos\theta\cos(\alpha - \theta) & -\text{sen}\theta\cos(\alpha - \theta) & \cos^2(\alpha - \theta) & -\text{sen}(\alpha - \theta)\cos(\alpha - \theta) \\ \cos\theta\cos(\alpha - \theta) & \text{sen}\theta\text{sen}(\alpha - \theta) & -\text{sen}(\alpha - \theta)\cos(\alpha - \theta) & \text{sen}^2(\alpha - \theta) \end{bmatrix}$$

Donde:

K: matriz de rigidez de la barra

L: longitud de la barra

A: sección de barra

E: módulo de elasticidad

1.3. Matriz de rigidez estructural de la armadura

Quispe (2015) afirma que para la matriz de rigidez estructural de la armadura se tiene que ensamblar cada elemento de dicha armadura, además, la matriz que se genera tendrá un tamaño igual al vector de cargas establecido.

$$K = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} K11 & K12 & \dots & K1n \\ K21 & K22 & \dots & K2n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ Kn1 & Kn2 & \dots & Knn \end{bmatrix}$$

Donde:

K: matriz de rigidez de la armadura

L: longitud de la barra

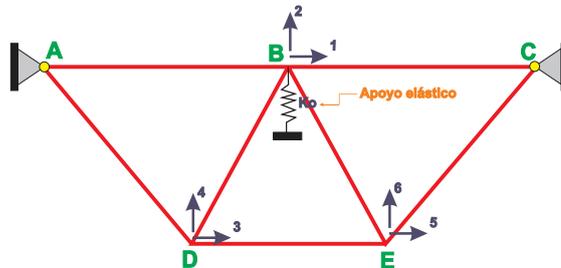
A: sección de barra

E: módulo de elasticidad

Matriz de rigidez estructural de la armadura con apoyo elástico

Rupay (2022) indica que para una armadura que posee un apoyo elástico en cualquiera de sus nodos a la matriz estructural de la armadura, se le deberá adicionar la rigidez del apoyo elástico en la dirección del grado de libertad en donde le está afectando.

Figura 3. Barra de una armadura plana con apoyo elástico



Nota. La armadura en el nodo B presenta un apoyo elástico que estará afectando al grado de libertad 2. Tomado de (Rupay, 2022)

$$K = \begin{bmatrix} K11 & K12 & K13 & K14 & K15 & K16 \\ & K22 + K0 & K23 & K24 & K25 & K26 \\ & & K33 & K34 & K35 & K36 \\ & & & K44 & K45 & K46 \\ & & & & K55 & K56 \\ & & & & & K66 \end{bmatrix}$$

Simétrica

Donde:

K: matriz de rigidez de la armadura

Vector de desplazamientos

Rupay (2021) afirma que el vector de desplazamientos dependerá de la matriz de rigidez de la armadura y del vector de cargas Q.

$$[D] = [K]^{-1} \cdot [Q]$$

Donde:

D: vector de desplazamientos

K: matriz de rigidez de la armadura

Q: vector de cargas

Fuerzas internas de cada elemento

Las fuerzas internas de las barras se expresan como:

$$F = \frac{EA}{L} [-c \quad -s \quad c \quad s] \cdot [D]$$

Donde:

F: fuerza interna

L: longitud de la barra

E: módulo de elasticidad

A: sección de barra

D: vector de desplazamientos

S: seno

C: coseno

Fuerzas internas con deformación unitaria

Hibbeler (2012). Establece que para una barra de la armadura muestra una variación de temperatura y un error de fabricación, las barras sufrirán una deformación en su estructura.

$$F = \frac{EA}{L} [-c \quad -s \quad c \quad s] \cdot [D] - E \cdot A \cdot \varepsilon_0$$

Donde:

F: fuerza interna

L: longitud de la barra

E: módulo de elasticidad

A: sección de barra

D: vector de desplazamientos

S: seno

C: coseno

ϵ_0 : deformación unitaria

1.6. Reacciones

Las reacciones de la armadura se expresan como:

$$R = K.D - Q$$

Donde:

R: reacción

K: matriz de rigidez de la armadura

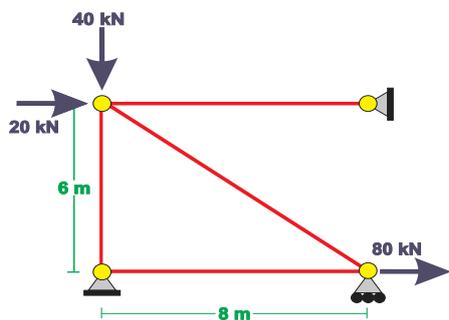
D: vector de desplazamientos

Q: vector de carga

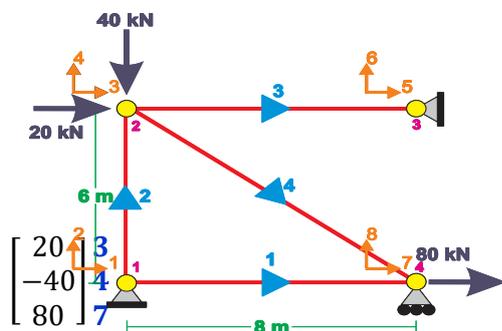
MATERIALES Y MÉTODOS

Aplicación a armaduras con fuerzas puntuales

La siguiente armadura plana posee un módulo de elasticidad de $2.1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ y una sección de barras igual 0.0006 m^2 . Determinar el vector de desplazamientos, las fuerzas internas y las reacciones.



Sistema Q-D



Q =

Matriz de rigidez de cada elemento

$$K = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \text{sen}\theta\cos\theta & -\cos^2\theta & -\text{sen}\theta\cos\theta \\ \text{sen}\theta\cos\theta & \text{sen}^2\theta & -\text{sen}\theta\cos\theta & -\text{sen}^2\theta \\ -\cos^2\theta & -\text{sen}\theta\cos\theta & \cos^2\theta & \text{sen}\theta\cos\theta \\ -\text{sen}\theta\cos\theta & -\text{sen}^2\theta & \text{sen}\theta\cos\theta & \text{sen}^2\theta \end{bmatrix}$$

Barra 1

$$K_1 = 1575 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{8} \end{matrix}$$

Barra 3

$$K_3 = 1575 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \end{matrix}$$

Barra 2

$$K_2 = 2100 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{matrix}$$

Barra 4

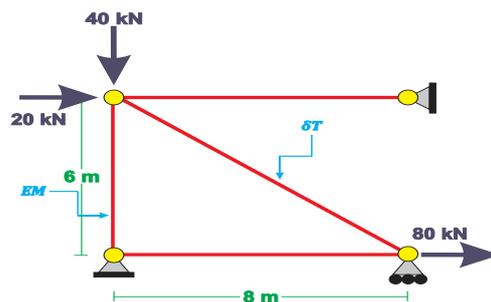
$$K_4 = 1260 \begin{bmatrix} 0.64 & -0.48 & -0.64 & 0.48 \\ -0.48 & 0.36 & 0.48 & -0.36 \\ -0.64 & 0.48 & 0.64 & -0.48 \\ 0.48 & -0.36 & -0.48 & 0.36 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{8} \end{matrix}$$

Matriz de rigidez del sistema

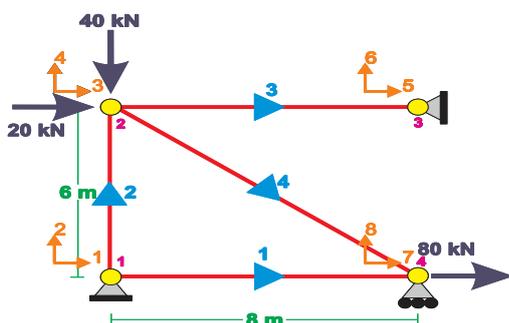
$$K = \begin{bmatrix} 2381.4 & -604.8 & -806.4 \\ -604.8 & 2553.6 & 604.8 \\ -806.4 & 604.8 & 2381.4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{7} \end{matrix}$$

Aplicación en armadura plana con deformación unitaria

La siguiente armadura plana posee un módulo de elasticidad de $2.1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ y una sección de barras igual 0.0006 m^2 además sufre un incremento de $10 \text{ }^\circ\text{C}$ también posee un coeficiente de dilatación térmica igual $5 \times 10^{-5} \text{ C}^{-1}$ además posee un error de montaje de 0.003 m en defecto. Determinar el vector de desplazamientos, las fuerzas internas y las reacciones.



Sistema Q-D



$$Q = \begin{bmatrix} 20 \\ -40 \\ 80 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{matrix}$$

Matriz de rigidez de cada elemento

$$K = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \text{sen}\theta\cos\theta & -\cos^2\theta & -\text{sen}\theta\cos\theta \\ \text{sen}\theta\cos\theta & \text{sen}^2\theta & -\text{sen}\theta\cos\theta & -\text{sen}^2\theta \\ -\cos^2\theta & -\text{sen}\theta\cos\theta & \cos^2\theta & \text{sen}\theta\cos\theta \\ -\text{sen}\theta\cos\theta & -\text{sen}^2\theta & \text{sen}\theta\cos\theta & \text{sen}^2\theta \end{bmatrix}$$

Barra 1

$$K_1 = 1575 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Barra 2

$$K_2 = 2100 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Barra 3

$$K_3 = 1575 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Barra 4

$$K_4 = 1260 \begin{bmatrix} 0.64 & -0.48 & -0.64 & 0.48 \\ -0.48 & 0.36 & 0.48 & -0.36 \\ -0.64 & 0.48 & 0.64 & -0.48 \\ 0.48 & -0.36 & -0.48 & 0.36 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Matriz de rigidez del sistema

$$K = \begin{bmatrix} 2381.4 & -604.8 & -806.4 \\ -604.8 & 2553.6 & 604.8 \\ -806.4 & 604.8 & 2381.4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{matrix}$$

Vector de cargas en función a la deformación unitaria

$$Q_\varepsilon = E \cdot A \cdot \varepsilon_0 \cdot [-C \quad -S \quad C \quad S]^T \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_0 = \alpha \cdot \Delta T \\ \varepsilon_0 = \frac{\Delta}{L} \end{matrix} \right\}$$

Barra 4

$$Q_{\varepsilon 4} = \begin{bmatrix} -5.04 \\ 3.78 \\ 5.04 \\ -3.78 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Barra 2

$$Q_{\varepsilon 2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6.3 \\ 0 \\ -6.3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Ensamblamos ambas cargas para obtener el vector de cargas totales en función a la deformación unitaria.

$$Q_\varepsilon = \begin{bmatrix} -5.04 \\ -2.52 \\ 5.04 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{matrix}$$

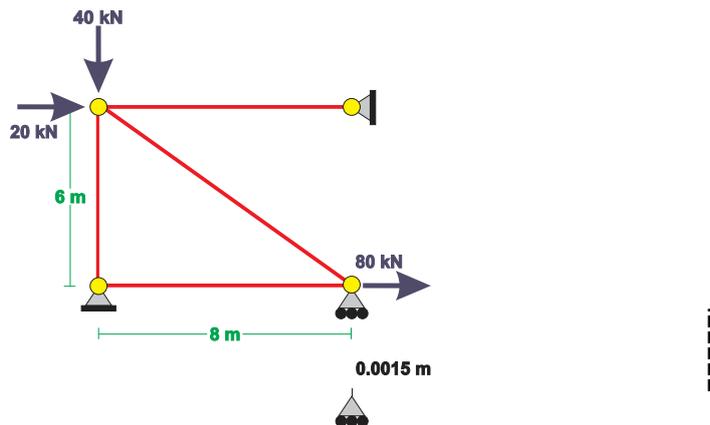
Vector de cargas

Para obtener la carga total de la armadura ensamblamos el vector de carga Q con el vector de cargas en función a la deformación unitaria.

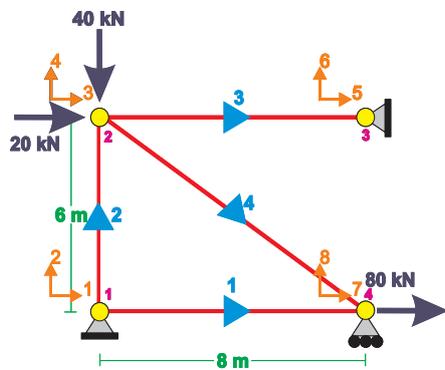
$$Q = \begin{bmatrix} 14.96 \\ -36.85 \\ 85.04 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{matrix}$$

Aplicación en armadura plana con asentamiento

La siguiente armadura plana posee un módulo de elasticidad de $2.1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ y una sección de barras igual 0.0006 m^2 además sufre un asentamiento de 0.0015 m verticalmente. Determinar el vector de desplazamientos, las fuerzas internas y las reacciones



Sistema Q-D



$$Q = \begin{bmatrix} 20 \\ -40 \\ -80 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{matrix}$$

Matriz de rigidez de cada elemento

$$K = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \text{sen}\theta\cos\theta & -\cos^2\theta & -\text{sen}\theta\cos\theta \\ \text{sen}\theta\cos\theta & \text{sen}^2\theta & -\text{sen}\theta\cos\theta & -\text{sen}^2\theta \\ -\cos^2\theta & -\text{sen}\theta\cos\theta & \cos^2\theta & \text{sen}\theta\cos\theta \\ -\text{sen}\theta\cos\theta & -\text{sen}^2\theta & \text{sen}\theta\cos\theta & \text{sen}^2\theta \end{bmatrix}$$

Barra 1

$$K_1 = 1575 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{8} \end{matrix}$$

Barra 2

$$K_2 = 2100 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{matrix}$$

Barra 3

$$K_3 = 1575 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \end{matrix}$$

Barra 4

$$K_4 = 1260 \begin{bmatrix} 0.64 & -0.48 & -0.64 & 0.48 \\ -0.48 & 0.36 & 0.48 & -0.36 \\ -0.64 & 0.48 & 0.64 & -0.48 \\ 0.48 & -0.36 & -0.48 & 0.36 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{8} \end{matrix}$$

Matriz de rigidez del sistema

$$K = \begin{bmatrix} 2381.4 & -604.8 & -806.4 & 604.8 \\ -604.8 & 2553.6 & 604.8 & -453.6 \\ -806.4 & 604.8 & 2381.4 & -604.8 \\ 604.8 & -453.6 & -604.8 & 453.6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{8} \end{matrix}$$

RESULTADOS**Aplicación en armadura plana con fuerzas puntuales****Vector de desplazamientos**

Calculado por el método de la rigidez

$$D = \begin{bmatrix} 0.018141 \\ -0.022109 \\ -0.045351 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{7} \end{matrix} m$$

Calculado por el software SAP2000

$$D = \begin{bmatrix} 0.018141 \\ -0.022109 \\ -0.045351 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{7} \end{matrix} m$$

Fuerzas internas de cada elemento

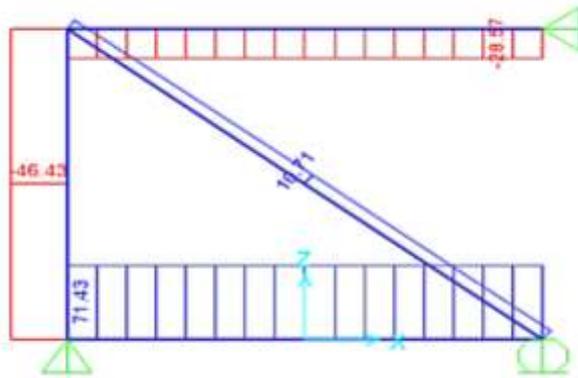
Tabla 1

Fuerzas internas calculado por el método de la rigidez

Barra	Fuerzas internas (kN)
1	71.43
2	-46.43
3	-28.57
4	10.71

Fuente: Elaboración propia.

Figura 4. Fuerzas internas calculado con el software SAP2000



Nota. El gráfico representa las fuerzas internas calculadas con el software SAP2000 en kN. Elaboración propia.

Reacciones

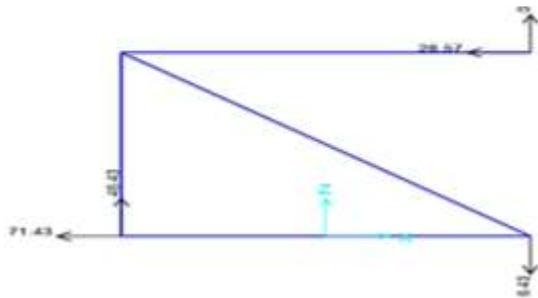
Tabla 2

Reacciones calculado por el método de la rigidez

Nodo	Reacción en x (kN)	Reacción en y (kN)
1	-71.43	46.43
3	28.57	0
4	0	-6.43

Fuente: Elaboración propia.

Figura 5. Reacciones calculado por el software SAP2000



Nota. El gráfico representa las reacciones calculadas con el software SAP2000 en kN. Elaboración propia.

Aplicación en armadura con deformación unitaria

Vector de desplazamientos

Calculado por el método de la rigidez

$$D = \begin{bmatrix} 0.016198 \\ -0.024016 \\ 0.047294 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \text{ m} \\ 7 \end{matrix}$$

Calculado por el software SAP2000

$$D = \begin{bmatrix} 0.016198 \\ -0.024016 \\ 0.047294 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \text{ m} \\ 7 \end{matrix}$$

Fuerzas internas de cada elemento

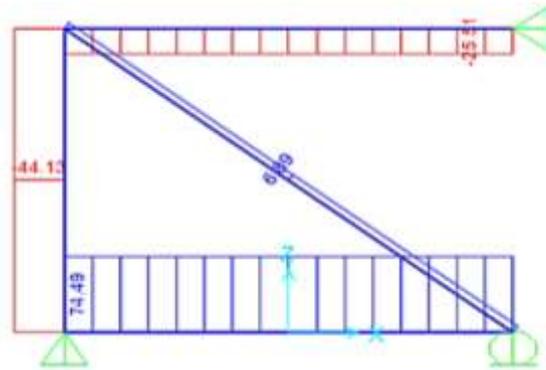
Tabla 3

Fuerzas internas calculado por el método de la rigidez

Barra	Fuerzas internas (kN)
1	74.49
2	-44.13
3	-25.51
4	6.89

Fuente: Elaboración propia.

Figura 6. Fuerzas internas calculado por el software SAP2000



Nota. El gráfico representa las fuerzas internas calculadas con el software SAP2000 en kN. Elaboración propia.

Reacciones

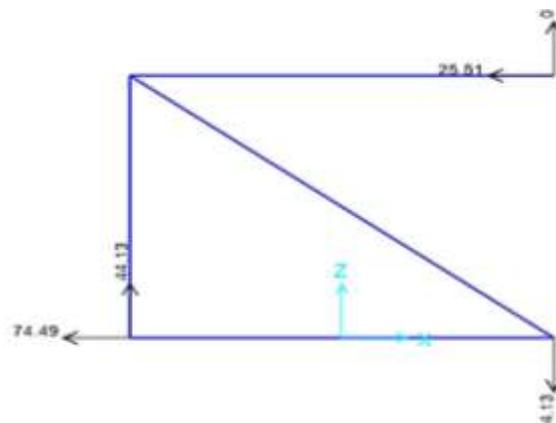
Tabla 4

Reacciones calculado por el método de la rigidez

Nodo	Reacción en x (kN)	Reacción en y (kN)
1	-74.49	44.13
3	25.51	0
4	0	-4.13

Fuente: Elaboración propia.

Figura 7. Reacciones calculado por el software SAP2000



Nota. El gráfico representa las reacciones calculadas con el software SAP2000 en kN. Elaboración propia.

Aplicación en armadura plana con asentamiento

Vector de desplazamientos

Calculado por el método de la rigidez

$$D = \begin{bmatrix} 0.018398 \\ -0.022253 \\ 0.045094 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \text{ m} \\ 4 \end{matrix}$$

Calculado por el software SAP2000

$$D = \begin{bmatrix} 0.018398 \\ -0.022253 \\ 0.045094 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \text{ m} \\ 4 \end{matrix}$$

Fuerzas internas de cada elemento

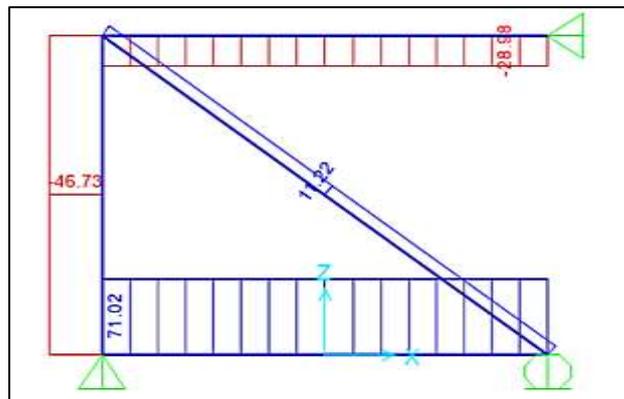
Tabla 5

Fuerzas internas calculado por el método de la rigidez

Barra	Fuerzas internas (kN)
1	71.02
2	-46.73
3	-28.98
4	11.22

Fuente: Elaboración propia.

Figura 8. *Fuerzas internas calculado por el software SAP2000*



Nota. El gráfico representa las fuerzas internas calculadas con el software SAP2000 en kN.

Elaboración propia.

Reacciones

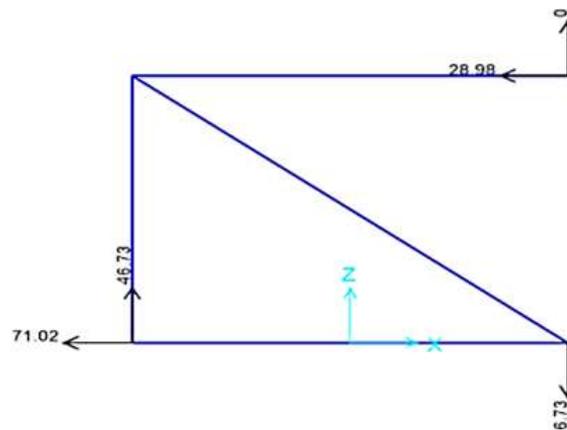
Tabla 6

Reacciones calculado por el método de la rigidez

Nodo	Reacción en x (kN)	Reacción en y (kN)
1	-71.02	46.73
3	28.98	0
4	0	-6.73

Fuente: Elaboración propia

Figura 9. Reacciones calculado por el software SAP2000



Nota. El gráfico representa las reacciones calculadas con el software SAP2000 en kN.

Elaboración propia.

DISCUSIÓN

Armadura plana con fuerzas puntuales

Comparando las respuestas estructurales obtenidos por el método de la rigidez y el software SAP2000.

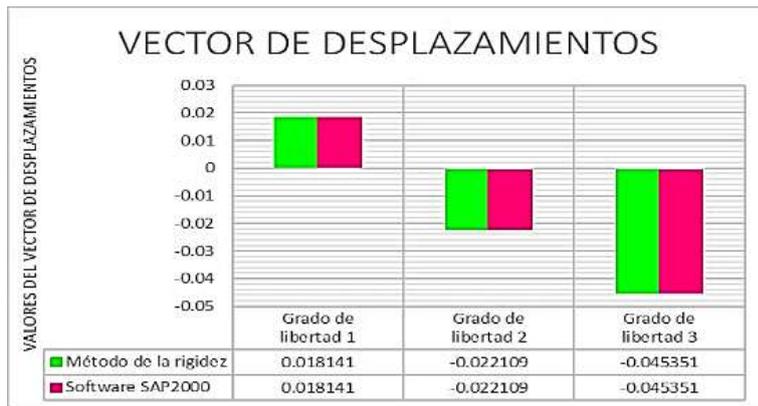
Tabla 11

Comparación del vector de desplazamientos

Grados libertad	de	Método de la rigidez (m)	Software SAP2000 (m)
3		0.018141	0.018141
4		-0.022109	-0.022109
7		-0.045351	-0.045351

Fuente: Elaboración propia.

Figura 14. Comparación del vector de desplazamientos



Nota. Tabla 11. En la figura 14 se puede observar que el vector de desplazamientos hallados por el método de la rigidez y el software SAP2000, no presentan ninguna variación en los resultados.

Armadura plana con deformación unitaria

Comparando las respuestas estructurales obtenidos por el método de la rigidez y el software SAP2000.

Tabla 12

Comparación del vector de desplazamientos

Grados de libertad	Método de la rigidez (m)	Software SAP2000 (m)
3	0.016198	0.016198
4	-0.024016	-0.024016
7	0.047294	0.047294

Fuente: Elaboración propia.

Figura 15. Comparación del vector de desplazamientos



Nota. Tabla 12. En la figura 15 se puede observar que el vector de desplazamientos hallados por el método de la rigidez y el software SAP2000, no presentan ninguna variación en los resultados.

Armadura plana con asentamiento

Comparando las respuestas estructurales obtenidos por el método de la rigidez y el software SAP2000.

Tabla 13

Comparación del vector de desplazamientos

Grados de libertad	Método de la rigidez (m)	Software SAP2000 (m)
3	0.018396	0.018396
4	-0.022253	-0.022253
7	0.045094	0.045094

Fuente: Elaboración propia.

Figura 16. Comparación del vector de desplazamientos



Nota. Tabla 13. En la figura 16 se puede observar que el vector de desplazamientos hallados por el método de la rigidez y el software SAP2000, no presentan ninguna variación en los resultados.

CONCLUSIÓN

Se analizó la armadura plana sometido a distintos sistemas de cargas: fuerzas puntuales, deformación unitaria, asentamientos, apoyos inclinados y elásticos mediante el método de la rigidez donde se obtuvieron las respuestas estructurales como el vector de desplazamientos, fuerzas internas y las reacciones en la que se contrastó los resultados con el uso del software SAP2000, donde se pudo apreciar que los resultados fueron los mismos.

Por otra parte, las matrices de rigidez estructural de una armadura cambian si se someten a asentamientos, apoyos inclinados y apoyos elásticos, en cambio si la armadura está sometido a fuerzas puntuales y deformación unitaria, la matriz de rigidez de la estructura para ambos casos no presenta ninguna variación.

Se concluyó que si la armadura se somete a diferentes sistemas de cargas que el vector de desplazamientos serán distintos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Argyris J. H., Kelsey S. (octubre de 1954). *Energy Theorems and Structural Analysis, Aircraft Engineering*. Obtenido de <https://core.ac.uk/download/pdf/83570224.pdf>

Bathe K. J. (1996). *Finite Element Procedures, Prentice-Hall*. Obtenido de <https://core.ac.uk/download/pdf/83570224.pdf>

Calderón Bernal, C. M., & Morocho Guamán, L. A. (2020). *Desarrollo del programa de análisis lineal y no lineal de estructuras en dos dimensiones por el método de desplazamientos*. [Tesis de Pregrado, Universidad de Cuenca]. Obtenido de <http://dspace.ucuenca.edu.ec/handle/123456789/34534>

Celigüeta Lizarza, J. T. (27 de enero de 2015). *Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural*. Obtenido de Método de los Elementos Finitos : <https://core.ac.uk/download/pdf/83570224.pdf>

Chapelle D., Bathe K. J. (2003). *The Finite Element Analysis of Shells – Fundamentals, Springer*.

Cook R. D. (1989). *Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley & Sons*. Obtenido de <https://core.ac.uk/download/pdf/83570224.pdf>

Crisfield M. A. (1986). *Finite Elements and Solution Procedures for Structural Analysis Vol. 1 Linear Analysis*. Obtenido de <https://core.ac.uk/download/pdf/83570224.pdf>

Hibbeler, R. C. (2012). *Análisis estructural*. Mexico: Pearson.

Hurtado, Jorge Eduardo. (2013). *repositorio.unal*. Obtenido de unal: <https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/12205/jorgeeduardohurtadogomez.2013.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

- Irons B., Ahmad S. (1981). *Techniques of Finite Elements*, Ellis Horwood Ltd. Obtenido de <https://core.ac.uk/download/pdf/83570224.pdf>
- J. R. Hughes, Thomas;. (1987). *Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Obtenido de https://books.google.com.cu/books?id=cHH2n_qBK0IC&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false
- Kassimali, A. (2015). *Análisis Estructural*. Mexico: Cengage Learning.
- Przemieniecki J. S. (1968). *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill. Obtenido de <https://core.ac.uk/download/pdf/83570224.pdf>
- Quispe, A. J. (2015). *Análisis matricial de estructuras*. Lima: Empresa Editora Macro EIRL.
- Reddy J. N. (1984). *An Introduction to the Finite Element Method*. Obtenido de <https://core.ac.uk/download/pdf/83570224.pdf>
- Rupay Vargas, M. J. (2021). Análisis Estructural I. *Apuntes de la clase método directo de la rigidez*.
- Rupay Vargas, M. J. (2022). Análisis Estructural II. *Apuntes de la clase tópicos especiales del método directo de la rigidez*.
- Stanley G. M., Park K. C., Hughes T. J. R., (1986). *Continuum-based resultant shell elements*. Obtenido de Finite Element Methods for Plate and Shell: <https://core.ac.uk/download/pdf/83570224.pdf>
- Szilard R. (1974). *Theory and Analysis of Plates*, Prentice Hall. Obtenido de <https://core.ac.uk/download/pdf/83570224.pdf>
- Wang C. M., Reddy J. N., Lee K. H. (2000). *Shear Deformable Beams and Plates*, Elsevier. Obtenido de <https://core.ac.uk/download/pdf/83570224.pdf>