Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar
Mayo-Junio, 2023, Volumen 7, Número 3.
https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v7i3.6571

Valoracion comparativa opciones en acciones call europeas: aproximaciones de black-scholes, expansion de edgeworth, brenner – subrahmanyam y binomial COX- ROS -rubisntein

Jose Antonio Arnez Gutierrez [1]
Jarnez.g@ucb.edu.bo
https://orcid.org/0009-0004-3198-7765
Docente investigador
Universida Catolica Boliviana San Pablo

RESUMEN

En la valoración de opciones en acciones sin dividendos, se encuentran diversos métodos que emergieron a partir de la estructura presentada por Black-Scholes, con dos importantes condiciones; Volatilidad medida por la desviación estándar y el rendimiento promedio de las acciones, dicha teoría se basa en supuestos de normalidad de la evolución de la cotización del activo subyacente, mismas que dieron apertura a otras investigaciones como la expansión de edgeworth que incluyen estadísticos de orden superior como asimetría y curtosis, explicando la presencia de una tendencia anormal de datos históricos, en este mismo análisis existe una simplicidad de los cálculos cuya fórmula está relacionada con la profundidad o alcance del dinero (At The Money) y el valor de la opción está determinado casi en su totalidad por el impacto de la volatilidad, proporcional al precio del activo subyacente. En los procesos estocásticos más específicamente en los movimientos Brownianos y Geométricos Brownianos, se sientan las bases de referencia de aproximaciones de tipo binomial y hasta trinomial, que sustentan acertados cambios en la proyección, herramienta para entender cambios ascendentes y descendentes, que refuerzan las variaciones del precio del activo hasta la fecha de vencimiento. Por lo anterior se propone una metodología comparada de aproximación de cuatro modelos que refuerzan la decisión de inversión en acciones sin dividendos con opción call de tipo europeo, basados en cálculos estadísticos y matemáticos.

Palabras clave: *asimetría; curtosis; anormalidad.*

[1] Autor principal
Correspondencia: Jarnez.g@ucb.edu.bo

Comparative Valuation of options in european call shares with aprroximations of black scholes, edgeworth expansion, brenner-subrahmanyam and binomial de COX, ROS and rubisntein

ABSTRACT

In the valuation of stock options without dividends, there are various methods that emerged from the structure presented by Black-Scholes, with two important conditions; Volatility measured by the standard deviation and the average return of the shares, this theory is based on assumptions of normality of the evolution of the price of the underlying asset, which gave rise to other investigations such as the edgeworth expansion that include higher order statistics. such as asymmetry and kurtosis, explaining the presence of an abnormal trend in historical data, in this same analysis there is a simplicity of the calculations whose formula is related to the depth or scope of money (At The Money) and the value of the option is determined almost entirely by the impact of volatility, proportional to the price of the underlying asset. In stochastic processes, more specifically in Brownian and Geometric Brownian movements, the reference bases of binomial and even trinomial approximations are established, which support correct changes in the projection, a tool to understand ascending and descending changes, which reinforce the variations of the price of the asset up to the expiration date. Therefore, a comparative methodology of approximation of four models is proposed that reinforce the investment decision in shares without dividends with a European-type call option, based on statistical and mathematical calculations.

Key words: *asymetry, Kurtosis; normality; binomial.*

Artículo recibido05-mayo-2023

Aceptado para publicación:05-junio-2023

INTRODUCCION

En el presente artículo se muestra una comparación de modelos de aproximación de opciones compra en acciones de tipo europeo sin dividendos, otorgando al inversor una decisión más aproximada a un valor real, como expone (Hull, 2009), la opción compra “call” le otorga al tenedor de una acción el derecho de adquirir a un precio y fecha específica, por medio de un contrato que tiene un vencimiento determinado, en la nomenclatura financiera se la conoce como precio de ejercicio (So), siguiendo a (Lamothe, 2003) las opciones pueden ser americanas o europeas, las primeras pueden ser ejercidas en cualquier momento de su vida hasta su fecha de vencimiento, mientras que las opciones europeas se ejercen únicamente en fecha de vencimiento, es preciso apuntar que en el mercado bursátil la mayoría que se negocia son americanas.

Cuando Black-Scholes en 1973 presentan una solución basada en supuestos como la condición de normalidad con curtosis igual a 3 y asimetría igual a 0, siendo que las condiciones actuales de una economía más globalizada no permiten un horizonte “normal” puestos que existen fuerzas económicas globales que afectan las cotizaciones de las empresas que participan en la bolsa de valores en la actualidad que se ven drásticamente influenciadas con tendencia alcista o bajista dependiendo el macro y micro entorno.

En este sentido se propone realizar un análisis comparativo de una opción en acciones bajo el modelo de Black-Scholes, versus otros modelos de reconocida fortaleza y explicar si la presencia de distorsiones en el valor de una acción en opción call europea, tiene un error relativo comparado determinante o aceptable

METODOLOGIA

Para la realización de esta investigación se utilizó el método Experimental descriptiva y explicativa, cuya valoración inicia con la ponderación de la volatilidad de un activo financiero, para este caso son las acciones, que bajo el modelo clásico de (Black, 1973), debe estimarse un valor teórico, misma que no se atribuye de forma directa como el precio de cierre de la cotización, según (Milanesi G. y., 2014), esta se puede clasificar en histórica, implícita proyectada y de cobertura, existen otras alternativas de cálculo sobre esta variable como la lógica difusa por ejemplo, así lo señala (Collan, 2009).

Una de las condiciones que definen a los métodos es el cálculo de la volatilidad, esta es determinante en la aproximación del valor de la opción, se conoce que con innovación tecnológica, alianzas estratégicas, fusiones, adquisiciones y otras, afectan de forma directa a las rentabilidades esperadas, así lo sugiere (Macbeth, 1980) .

Para (Alegria, 1996), presenta modelos de valoración de opciones según el comportamiento de la volatilidad, entre los que rescata y pone de manifiesto sus ventajas y límites entras las cuales destaca: Elasticidad de sustitución constante, Opción compuesta, difusión desplazada, volatilidad estocástica, volatilidad implícita, difusión de saltos para volatilidad, opciones tipo ARCH, procesos de caos para volatilidad y binomial implícito, cierra con la importancia del cálculo y su impacto en el portafolio de cartera.

Según (Arango, 2015) las valoraciones de los cálculos del valor de la opción realizadas en R-Project , demuestran que la opción alcanza su límite máximo cuando el precio del ejercicio (So) toma un valor menor, respecto a la tasa libre de riesgo y otras variables que permanecen constantes, específicamente expone que las variaciones de la volatilidad, otorgan aumento en el valor de la opción.

Por su parte (Cangrejo, 2022), en una comparación de los modelos bayesianos para estimar la volatilidad con 95% de nivel de confianza presentan una menor variabilidad en la estimación, explica que no hay referencias sobre cálculos de distribución de Levy Estándar al estadístico de volatilidad. En esta comparación aplica MMV, Bootstrap, Jeffreys, Gama inversa 1,2 y 3, Levy estándar 1,2 y 3 demostrando que la variación es mínima

En la aproximación de la expansión de Edgeworth para (Ferreira, 2012), demuestra la importancia de aplicar momentos estocásticos en la valoración de opciones reales, conjuntamente con la simulación de Montecarlo, además de complementar los métodos tradicionales de cálculo.

Según (Acosta-Rueda, 2020), la valoración de opciones en contexto de no normalidad con la aproximación de Edgeworth expone deficiencias del modelo Black-Scholes basado en supuestos simplificadores, y considera además que el objeto de su investigación presenta asimetría y curtosis relacionados al tipo de mercado y economía, argumenta basado en (Rydberg, 2000) que se debe probar la distribución normal de los datos estadísticos previos a los cálculos de cada método especialmente de Black-Scholes.

Para (Akita, 2010), establece parámetros de bondad de ajuste en la aproximación de edgeworth, considerando limites relativos a Análisis multivariante de la varianza (MANOVA), concluyen que la aplicación es muy práctica de acuerdo a los resultados obtenidos.

En la búsqueda de la simplicidad de las fórmulas de valoración de opciones de tipo europeo para compra (call), se encuentra (Brenner, 1998), quien propone que la base de las derivadas “d1” y “d2” de las fórmulas de Black-Scholes pueden ser adaptadas a partir del precio del ejercicio, así lo expone (Venegas, 2008), resaltando la simplicidad de la aproximación partiendo del precio del ejercicio como precio futuro del activo subyacente, y propone tres fórmulas adicionales sobre la misma expresión.

En el modelo de (Cox, 1979), las ramas del árbol binomial representan las posibles trayectorias que puede tomar de forma ascendente y descendente el activo subyacente durante la vida de la opción, para (Venegas, 2008) destaca que este modelo carece de oportunidades de arbitraje, están libres de riesgo.

Para (Lamothe, 2003) la valoración simple de binomial asume condiciones, como ausencia de costos transacción, compraventa al descubierto, activos divisibles y sin dividendos, el precio del activo evoluciona de forma multiplicativa,

Existe una convergencia del modelo binomial y Black-Scholes fundamentalmente en el teorema del límite central, de la distribución normal a la binomial cuando el número de repeticiones tiene a infinito así lo expone (Venegas, 2008), sobre el procedimiento con enfoque probabilístico para calcular el valor esperado del pago a fecha de vencimiento de la opción, para (Acosta-Rueda, 2020) establece que tres modelos binomiales han logrado probar su consistencia cuando N tiende a infinito.

En un esfuerzo de comparación de modelos de valoración (Cepeda Vega, 2022), concluye que las aproximaciones entre Black-Scholes, Cox-Ross-Rubientein con árbol binomial y trinomial, y el modelo de Duan. En todos los modelos aplicados se utiliza la volatilidad histórica de los retornos del activo que se mantiene constante para calcular el valor de la opción, excepto el modelo de Duan cuya postura asume volatilidad mediante el proceso GARCH - Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (encuentra la volatilidad promedio a medio plazo mediante una autorregresión que depende de la suma de perturbaciones rezagadas y de la suma de varianzas rezagadas) según los datos históricos para calcular la volatilidad futura hasta cada plazo de vencimiento. a periodos de 30, 90 y 120 días, los resultados son similares en su valoración asumiendo que estos tienen asimetría y curtosis definidas.

Cuando se trata de valoración de opciones en acciones los modelos más estudiados en los ámbitos académicos y de aplicación práctica real son arboles binomiales, y por Black-Scholes, cuyos aportes han sentado las bases para que desarrollen nuevos enfoques y modificaciones exponiendo fallas en los supuestos básicos de dichas aproximaciones.

Para (Hull, 2009), el modelo de Black-Scholes tiene supuestos de comportamiento de la acción en condición logarítmico normal (μ rendimiento esperado de las acciones, σ volatilidad), no hay costos de transacción ni impuestos, no hay dividendos en la vida de la opción, no hay arbitraje libre de riesgo, la tasa libre de riesgo es de corto plazo y constante; bajo estas condiciones se asume que los rendimientos de las acciones deberán tener una distribución normal, con curtosis igual a 3, y una asimetría de cero, bajo esos parámetros en la actualidad por la evolución y cambios de la economía global es complicado encontrar tales escenarios.

Las evoluciones de los análisis han dado lugar a diferentes modelos que tratan de explicar e ilustrar matemáticamente que las valoraciones de acciones en opciones con y sin dividendos pueden ser calculadas con ajustes a la realidad para que un inversor tome decisión sobre estos activos financieros.

La técnica binomial se sustenta sobre la base de cambios ascendentes y descendentes considerando la valoración neutral al riesgo, entendiendo que la misma se sustenta en una caminata aleatoria de un proceso estocástico, para (Cox, 1979) pioneros de esta metodología, proponen a partir de los límites del valor de compra o Call, la evolución con carácter multiplicativo.

Por su parte (Brenner, 1998) desarrolla una aproximación de fácil aplicación cuyos resultados son satisfactorios con ciertas condiciones, asume que el valor strike o precio del ejercicio es igual al precio futuro del activo subyacente, y determina que la primara derivada está afectada por la volatilidad, y la valoración de $1/\sqrt[2]{2\pi}$.

Los aportes de (Baliero Filho, 1972), son la base de las aproximaciones de (Jarrrow R. y Rudd, 1982) quienes emplearon la expansión EdgeWorth presentada por (Schleher, 1977), fundamentalmente en la presencia de estadísticos de orden superior como asimetría y curtosis cuando la evolución histórica de las cotizaciones de las acciones tiene un sesgo.

Siguiendo el trabajo de (Acosta-Rueda, 2020), quien considera un análisis especifico comparado de 5 métodos binomiales , con diferentes intervalos de tiempo versus la expansión de Edgeworth, en base a la aproximación de Black-Scholes, para un caso específico no comparado, demuestra que a distintos niveles o intervalos de tiempo de N=1 a 1.000, el error relativo esta entre -0.6 y -0.5 para periodos de 1 año y medio año (N=1000 y N=500), siendo para N=1 a N=50 entre 10.2 como máximo y 6.8 mínimo de error mencionado.

Modelo Black –Scholes

Para (Black, 1973), en la valoración de opciones en acciones se asume que el rendimiento en un corto periodo se distribuye normalmente, a más periodos estos se superponen de forma independiente, lo que implica que el precio por acción en fecha futura tiene una distribución logarítmica normal, es decir es asimétrica con mediana, moda y media diferentes a lo esperado.

$\mathrm{Ln}\ So + (\mu - \sigma^2/2)\ T$ y $\sigma\sqrt[2]{T}$, donde So es el precio actual de la acción, mismos que se replantean y se exponen: $\mathrm{Ln}\ St\ -_{\varphi}\ (\mathrm{Ln}\ So + (\mu - \sigma^2/2)\ T$ y $\sigma\sqrt[2]{T}$,), buscando el valor esperado $E(St) = So\ e^{\mu T}$ que vendría a ser la media o valor esperado, y la varianza definida por $Var(St) = So^2\ e^{2\ Ut}\ (e^{\sigma 2\ T} - 1)$. Estas tres condiciones según (Hull, 2009) permiten encontrar los límites de confianza ,media y varianza del precio futuro de una acción, apoyado por la inferencia estadística de nivel de confianza y riesgo estadísticos de la distribución normal.

Bajos los supuestos subyacentes del modelo (Black, 1973), proponen la siguiente formulación para calcular el valor call europea: $c = So\ (Nd1) - K\ e^{-rT}(Nd2)$

$$d_1 = \frac{\mathrm{Ln}\ (So/K) + (r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt[2]{T}} \quad \text{y} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt[2]{T}$$

La función de probabilidad acumulativa en una variable normal estandarizada está definida por N(x), K precio del ejercicio

Modelo Brenner –Subrahmanyam

La fórmula aproximada en general es más sencilla de aplicación, pero tiene limitaciones cuando la volatilidad no está en cierto rango esperado, asume que el precio del ejercicio (K) es igual al precio del valor futuro de dicho activo: $K= Ste^{rt}$, puede verificarse la primera derivada de forma inmediata:

$$d_1 = 0.50\ \sigma\sqrt[2]{T}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt[2]{T} = -d_1$$

Explica (Brenner, 1998), Ø($-d_{1}$) + Ø($-d_{1}$) = 1 , lo que implica que

c = St (Ø(d_{1}) - Ø($-d_{1}$)) = St (1-2 Ø($-d_{1}$))

En el análisis de cálculo diferencial para (Venegas, 2008) la diferencial Ø($-d_{1}$) evaluada en cero produce una expresión que $1/\sqrt[2]{2\pi}$ es el valor máximo que puede alcanzar Ø(d) d € R por lo tanto desprende:

c = St (1 – 2 (0.50- ($1/\sqrt[2]{2\pi}$)d_{1}) = St 2 d1 / $\sqrt[2]{2\pi}$ = St 2/5 σ $\sqrt[2]{T}$

Modelos Binomiales

En su expresión más sencilla , (Lamothe, 2003) explica que este método utiliza algoritmos de cálculo numérico , es por ello que (Cox, 1979), estableces dos movimientos del precio de la acción, ascendente y descendente, explica que el argumento del precio de la acción So y una opción cuyo precio actual o descontado es f, en una vida de T periodos este puede subir a Sou o bajar a Sod siendo (u> y d<1), entonces tenemos que SouΔ - fu, si cambia positivamente y SodΔ - fd si cambia negativamente

Estas condiciones las expone (Hull, 2009) de manera congruentes con la valoración neutral a riesgo, entonces este modelo requiere de:

P = a –d / u – d, donde a = $e^{r\Delta t}$ siendo la P la probabilidad estimada en la caminata aleatoria, mientras que u = e^{σ} $\sqrt{\Delta T}$ y d = 1/u, encontrando en cualquier punto del árbol binomial el valor f conociendo:

$$f_u = e^{-r\Delta t}[p f_{uu} + (1-p) f_{ud}]$$
$$f_d = e^{-r\Delta t}[p f_{ud} + (1-p) f_{dd}]$$
$$f = e^{-r\Delta t}[p f_u + (1-p) f_d]$$

Modelo Expansión de Edgeworth

De acuerdo con (Acosta-Rueda, 2020), explica que la base de la expansión se encuentra en seis momentos de los polinomios de Hermite, lo que permite reexcribir la función de St, en base de crecimiento, para ello aplica el enfoque de ecuaciones diferenciales de Black-Scholes y subraya que el punto de inicio de los cálculos en este modelo parte de los trabajos de (Baliero Filho, 1972)donde:

$$\mu T = rT - \log\left(1 + \frac{k-3}{24}\left(\sigma\sqrt{T}\right)^3 + \frac{\xi^2}{72}\left(\sigma\sqrt{T}\right)^6\right)$$

Ya conocido el valor de μ, calculamos x_m que es el valor mínimo de la variable alaetoria, asi lo explica (Milanesi G. y., 2014), siendo la asimetría ξ= 0 y Curtosis = Ḱ = 3 en condiciones normales se asemejan a la valoración d1 de Black Scholes, entonces se tiene:

$$x_m = \frac{\left(\log\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)}{\sigma\sqrt{T}}$$

En todo caso así lo expone (Acosta-Rueda, 2020) y (Milanesi G. y., 2014) el call de la expansión Edgeworth se representaría de la siguiente manera con integrales:

$$C_0^{Edge.} = e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty} dx g(x)\,\mathrm{Max}\left(S_0 e^{\left(\mu-\sigma^2/2\right)T+\sigma\sqrt{T}x} - K, 0\right)$$

Y en su expresión extendida será:

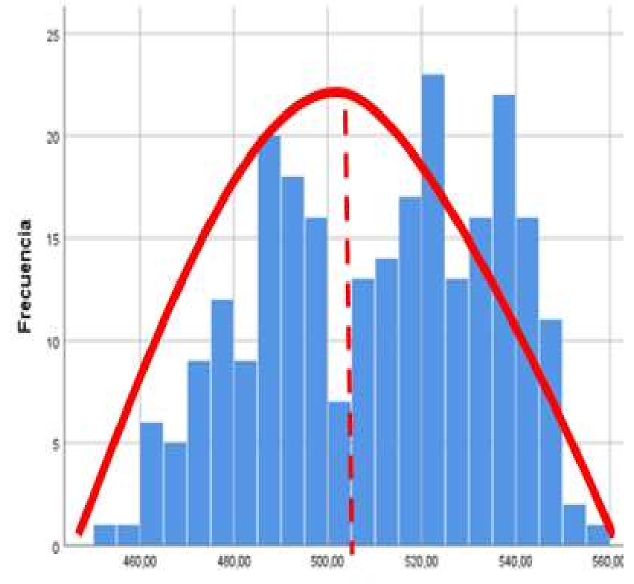
$$\begin{aligned}
C_0^{Edge.} = C_0^{BS} &+ \left(\frac{e^{\mu - rT - x_m^2/2 + \sigma\sqrt{T}x_m}}{72\sqrt{2\pi}} S\left(\left(\sigma\sqrt{T}\right)^5 \xi^2 + \left(\sigma\sqrt{T}\right)^4 \xi^2 x_m\right.\right.\\
&+ \left(\sigma\sqrt{T}\right)^3 \left(3(k-3)\xi^2\left(x_m^2 - 1\right)\right.\\
&+ \left(\sigma\sqrt{T}\right)^2 \left(12\xi - 3(k-3)x_m + \xi^2 x_m\left(x_m^2 - 1\right)\right)\\
&+ \left.\left.\left.\xi^2\left(x_m^4 - 6x_m^2 + 3\right)\right)\right)\right)\\
&+ \left(\frac{e^{\mu - rT - x_m^2/2}}{72\sqrt{2\pi}}\left(e^{\mu + \sigma\sqrt{T}x_m} S - K\right)\left(3(k-3)x_m\left(x_m^2 - 3\right)\right.\right.\\
&+ \left.\left.12\xi\left(x_m^2 - 1\right) + \xi^2 x_m\left(x_m^4 - 10x_m^2 + 15\right)\right)\right)\\
&+ \left(\frac{e^{\mu - rT - \sigma^2 T/2}}{72} SN(d_1)\left(\left(\sigma\sqrt{T}\right)^4 3(k-3) + \left(\sigma\sqrt{T}\right)^6 \xi^2\right.\right.\\
&+ \left.\left.\left.12\left(\sigma\sqrt{T}\right)^3 \xi\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

RESULTADOS Y DISCUSION

Caso de aplicación: Valoración comparada de una Opcion Call europea sobre acciones que no pagan dividendos

Se considera como muestra tomada al azar a una empresa que cotizan en la Bolsa de Valores en Estados Unidos, con el precio alto el 17 de abril de 2023:UnitedHealth Group Incorporated (UNH) cuya cotización es de $us511.79 inscrito en 23 indicadores se tomara como base una opción call de tipo europea que no paga dividendos sobre los precios de cierre de 1 periodo entre 31 de marzo de 2022 a 31 de marzo 2023, como base de información está la serie de datos resumen la evolución histórica de las acciones [2], que fueron tabuladas en SPSS versión 25, y para el cálculo comparativo con árbol binomial según (Cox, 1979) se aplica el software propuesto por (Hull, 2009) Derivagen. La empresa objeto de investigación expone una beta de 0.68 dividendos de 6.60 (1.34%), un EPS de 22.16, y un P/E ratio de 22.22, su evolución histórica de cambios en -3.24%, datos del análisis fundamental que un inversionista entiende que son atractivos para una potencial compra, ahora bien, esta puede ser mediante un contrato de opción call de acciones sin dividendo, por lo que se recurre a la aplicación de métodos de valoración.

Grafico 1: *Histograma y Estadísticos para análisis y comparación en N=252 días de: UnitedHealth Group Incorporated (UNH)*



ESTADISTICOS		UnitedHealth Group Incorporated (UNH)
Media		510,2796
95% de intervalo de confianza para la media	Límite inferior	61,3023
	Límite superior	61,9286
Media recortada al 5%		510,7700
Mediana		513,7950
Varianza		602,142
Desv. Desviación		24,53859
Mínimo		452,06
Máximo		555,15
Rango		103,09
Rango intercuartil		41,74
Asimetría		**-0,239**
Curtosis		**-1,027**

Fuente: elaboracion propia

Se tabularon los datos históricos de 252 días de cotización tomando como referencia el precio de cierre, misma que utilizando el SPSS versión 25, nos presenta información sin tendencia normal mientras que la correlación muestra una tendencia casi uniforme

Inicialmente se hara una comparacion At the money, donde el precio del ejercicio So, es igual al precio de ejercicio K, manteniendo las variables de volatilidad, curtosis y asimetria tal como registra el SPSS 25, seguidamente se hara calculos comparados con los cuatro metodos, buscando evidencia que

[2] Los datos históricos de las acciones fueron obtenidos de www.Investing.com

demuestre su proximidad relativa, para tal efecto exponemos la siguiente relacion de variables para exponer los calculos y resultados. Con base a (Triola, 2018), la prueba parametrica de Kolgomorov-Smirnov a la muestra N>50 se observa que la variable de la cotizacion no sigue una distribucion normal ya que p-valor=0.002 es < alfa (5%), puesto que aseguramos un nivel de confianza de 95% .

Tabla 2: *Estadísticos para análisis y comparación*

	UnitedHealth Group Incorporated (UNH)
So = Precio cierre 31.03.2023	**472.59**
K = Precio de ejercicio "At The Money"	**472.59**
σ =Volatilidad histórica	24.54%
r = Tasa libre de riesgo[3]	3.515%
ξ= Asimetría	-0.239
k = Curtosis	-1.027
T = vencimiento	1 año
N = Numero de acciones de cierre	252

Fuente: Elaboración propia

Según la información anterior se realizaron los cálculos según los modelos propuestos para la acción sin dividendos con opción call de tipo europeo, obteniendo la siguiente comparación:

Tabla 3: *Comparación de modelos Opción Call europea "At The Money" para UnitedHealth Group Incorporated (UNH)*

	Black-Scholes	**Brenner-Subrahmanyan**	**Expansion EdgeWorth**	**Binomial de Cox-Rox-Rubinstein**
Call	43.62	44.78	39.59	48.78
d1	0.2659	0.1227		
d2	0.0205			
Nd1	0.60488		0.60488	
Nd2	0.5080		0	
Ur			4.86%	
Rm			-0.07532	
p				0.5076
u				1.1895
d				0.8407
a				1.0177

Fuente: elaboración propia

[3] Dato obtenido de: https://datosmacro.expansion.com/bono/usa

Analizando los resultados obtenidos se observa que los métodos comparados de Black-Scholes y Brenner –Subrahmanyam, tienen un error relativo de -0.027 demostrando que existe una estrecha relación y que la simplicidad del cálculo presenta una particular ventaja de aproximación, mientras que era de esperar que la expansión edgeworth que aplica estadísticos de orden superior y además considera los valores de call y Nd1 de Black-Scholes parece corregir la condición de anormalidad, así también como prueba de validación el binomial de Binomial de Cox-Rox-Rubinstein (CRR) otorga una leve superioridad debido a que este fundamenta sobre el valor de la probabilidad ascendente respetando la volatilidad implícita obtenida.

Ahora, si mantenemos las variables, y cambiamos la fecha de vencimiento o los periodos en T-t= a 0.25, 0.50 y 0.75 de un periodo N=252 o T=1, tenemos los siguientes resultados

Tabla 4: *Valor call europea: T=0.75, T= 0.50 y T=0.25*

	Black-Scholes	Brenner-Subrahmanyan	Expansion EdgeWorth	Binomial de Cox-Rox-Rubinstein
Call T-t = 0.25	22.54	23.00	23.81	22.52
Call T-t = 0.50	33.32	33.23	33.40	35.87
Call T-t = 0.75	41.12	39.13	39.36	44.94

Fuente: elaboración propia

Analizando el cuadro anterior se demuestra que la aproximación de valores de los cuatro métodos empleados, tiene distancias o errores relativos propios con la teoría que sustentan sus métodos y cálculos, es decir que la comparación con Black-Scholes y la expansión de edgeworth, en este último será menor por la corrección de asimetría y curtosis de los datos históricos, sin embargo, queda expuesto que Brenner-Subrahmanyan está más próximo a la expansión que los demás. Mientras que la binomial de CRR manifiesta una leve superioridad en proporción a los demás debido a que considera una condición probabilística ascendente progresiva exponencial, los resultados de este último son en base a DERIVAGEM.

DISCUSION

La decisión de inversión en acciones bajo la modalidad de contrato de opciones compra –"call", ha sido analizada durante décadas partiendo de la propuesta inicial realizada por Black-Scholes, bajo supuestos que seguidamente fueron revisados por diversos autores validando a la formulación que corresponde a la expansión Edgeworth como la que corrige las distorsiones de anormalidad de la evolución de las cotizaciones incluyendo estadísticos de orden superior.

Es también importante mencionar que Brenner –Subrahmanyam presentan una simplicidad de cálculo basados en el impacto de la volatilidad modificada según resultados de Balck-Scholes. En este análisis comparativo no puede estar separado el árbol binomial de Cox-Roos-Rubistein cuya fortaleza y además la manera gráfica de solución determina que los cambios ascendentes/descendentes medidos también por la volatilidad y el tiempo a vencimiento del activo son determinantes.

Es a partir de este análisis comparativo de valoración que la decisión de inversión en este tipo de contrato de opciones europeas en acciones sin dividendos call, refuerzan aquellos estudios que solo comparan de dos a tres métodos a intervalos de tiempos diferentes y condiciones del objeto de investigación según la coyuntura económica.

CONCLUSIONES

El modelo de Black-Scholes es el más empleado en la valoración de las opciones de tipo europeas tanto para compra y venta respectivamente, salvando las deficiencias expuestas y analizadas ampliamente en diversas investigaciones se debe principalmente a los supuestos que fundamentan las bases de cálculo. Considera que la distribución long-normal de los precios de las acciones es cercana a la distribución exponiendo deficiencias significativas.

La presente investigación propone una valoración comparada de cuatro métodos suficientemente investigados, excepto el de Brenner-Subrahmanyan cuya simplicidad fortalece la idea central sobre volatilidad e impacto en el activo subyacente, mientras que con la expansión de edgeworth corrige aquellas desviaciones respecto al comportamiento normal y propone una modificación incluyendo asimetría y curtosis.

Es preciso señalar que los resultados no son concluyentes, ya que solo se consideró un caso de aplicación, pero a distintos periodos o intervalos de tiempo las aproximaciones son cercanas unas a otras.

En síntesis, este trabajo aplico técnicas que permitan comparar y proponer una aproximación de resultados en la valoración de opciones de tipo europeo sin dividendos, fortaleciendo la importancia de la volatilidad y el promedio de las cotizaciones de las acciones como plataforma de análisis y conclusiones.

Para finalizar, esta investigación plantea observar cuales los resultados de esta comparación en opciones put de tipo europeo de acciones sin dividendos a diferentes periodos, cuyo principal desafío será modificar la simplicidad de Brenner-Subrahmanyan.

BIBLIOGRAFÍA

Acosta-Rueda, K. (2020). Valoracion de opciones financleras call en contexto de no normalidad, bajo la aproximacion de Edgeworth. *ODEON*, 19,199-152.

Akita, T. J. (2010). High-dimensional Edgeworth expansion of a test statistic on independence and it is error bound. *Jorunal of Multivariate Analysis*, 1806-1813.

Alegria, L. (1996). La volatilidad: Modelizacion en la valoracion de opciones y estimadores. *Investigaciones Europeas de Direccion y Economia de la Empresa*, 59-83.

Arango, M. R. (2015). Valoracion de opciones por el meodo de Balck Scholes en R-Project. *Lumina 15*, 214-225.

Baliero Filho, R. R. (1972). Testing option pricin with Edgeworth expansion. *Physica A. Statistical Mechanis an its Application*, 399-418.

Black, F. y. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 637-59.

Brenner, M. a. (1998). A Simple Approach to Option Valuation and Heling in the Balck-Scholes". *Financial Analysis Journal Vol 50*, 25-28.

Cangrejo, A. T. (2022). Estimacion clasica y bayesiana de la volatilidad en el modelo Black-Scholes. *Metodos cuantitativos para la economia y la empresa(34)* , 237-262.

Cepeda Vega, K. &. (2022). *Metodologías alternativas para la valoración de opciones europeas.* Obtenido de Universidad LaSalle, Bogota: https://ciencia.lasalle.edu.co/finanzas_comercio/666

Collan, M. F. (2009). Fuzzy pay-off method for real option valuation. *Journal of Applied Mathematics and Decision Systems*, 1-14.

Cox, J. R. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 229-263.

Ferreira, C. M. (2012). Aplicacion de la expansion de Edgeworth en la valuacion de decisiones estrategicas mediante enfoque de opciones reales en empresas de base tegnologica-Spin OFF. *Estudios contables y de administracion ISSN 1853-2063 vol 3*, 41-74.

Hull, J. (2009). *INTRODUCCION A LOS MERCADOS DE FUTUROS Y OPCIONES.* NAUCALPAN DE JUAREZ, MEXICO: PEARSON.

Jarrrow R. y Rudd, A. (1982). Aproximate option valuation for arbitrary stochastic processes. *Journal of Financial Economics*, 347-369.

Lamothe, P. (2003). *Opciones Financieras Un enfoque fundamental.* Madrid: Fareso S.A.

Macbeth, J. D. (1980). Test of the Black-Scholes and Cox Call Option Valuation Models. *Journal of Finance 35*, 285-300.

Merton, R. (1973). Theory of Rational Option Pricing. *Journal of Economic and Management Science*, 141-183.

Milanesi, G. (2013). Valuacion de opciones reales: Analisis comparativo entre modelo binomial y version borrosa. *Depto. Ciencias Administracion-Uniersidad Nacional del Sur Argentina*, 78-97.

Milanesi, G. y. (2014). Momentos Estocasticos de orden superior y la estimacion de la volatilidad implicita: aplicacion de la expansion de Edgeworth en el modelo Black--Scholes . *Estudios Gerenciales, 30 (133)*, 336-342.

Rydberg, T. (2000). Realistic Statistical Modeling of Financial Data. *International Satatistical Review*, 233-258.

Schleher, D. (1977). Generalized Gram-Charlier series with application to the sum of long-normal. *IEEE Trasactions on Information Theory*, 275-280.

Triola, D. (2018). *ESTADISTICA.* Ciudad de Mexico: Pearson.

Venegas, F. (2008). *Riesgos financieros y economicos.* Santa Fex, Mexico: Cengage Learning Editores.