



La edad de las operaciones formales de Jean Piaget y el rendimiento académico en matemáticas

Alberto Ernesto Gutiérrez Borda

egutierrez@unica.edu.pe

<https://orcid.org/0000-0001-6260-2419>

Universidad Nacional San Luis Gonzaga

Facultad de Ciencias Ica - Perú

RESUMEN

El estudio es descriptivo y correlacional, su interés responde a determinar si existe asociación entre el nivel de inteligencia del período de las operaciones formales de Jean Piaget asociado con el rendimiento académico en Matemáticas en estudiantes de la I.E. Abraham Valdelomar y la I.E. Privada Arbulú de la ciudad de Ica. El objetivo es sistematizar evidencias con antecedentes teóricos y empíricos sobre la base de conceptualización de las teorías vinculadas con la enseñanza, comprender los niveles de abstracción alcanzado por los alumnos. Los resultados obtenidos, revelan que el nivel de inteligencia del período de las operaciones formales, respecto del rendimiento académico en Matemáticas junto con las conclusiones constituyen una reflexión para mejorar los problemas inherentes a la enseñanza.

Palabras clave: operaciones formales; pensamiento formal; enseñanza de la matemática.

Jean Piaget's age of formal operations and academic Performance in mathematics

ABSTRACT

The study is descriptive and correlational, its interest responds to determining if there is an association between the level of intelligence of the period of the formal operations of Jean Piaget associated with the academic performance in Mathematics in students of the I.E. Abraham Valdelomar and the I.E. Private Arbulú of the city of Ica. The objective is to systematize evidence with theoretical and empirical background on the basis of conceptualization of theories related to teaching, to understand the levels of abstraction reached by students. The results obtained reveal that the level of intelligence of the period of formal operations, regarding academic performance in Mathematics, together with the conclusions, constitute a reflection to improve the problems inherent to teaching.

Keywords: formal operations; formal thinking; teaching mathematics

Artículo recibido: 18. Junio. 2021

Aceptado para publicación: 26. Julio. 2021

Correspondencia: egutierrez@unica.edu.pe

Conflictos de Interés: Ninguna que declarar

INTRODUCCIÓN

Continuamente en diversos escenarios se habla de una Matemática moderna, se ensayan diversos y variados proyectos para mejorar la enseñanza, pero en la mayoría de los casos sus resultados son para señalar cierto fracaso de la educación Matemática. Frente a esto, uno de los investigadores a lo que recurren es a Jean Piaget. En el Perú, en los últimos años ha surgido la propuesta de cambiar la enseñanza tradicional por un nuevo paradigma educativo, en tal sentido el pensamiento sobre el desarrollo intelectual del niño está vigente. En los resultados de sus investigaciones personales, Piaget llegó a establecer que el pensamiento del educando progresa en cuatro períodos de desarrollo y de éstos el cuarto es las operaciones formales, etapa de la abstracción y, comprende el aprendizaje de la Matemática (Labinowicz, 1987).

El estudio recoge esta preocupación bajo la propuesta del método modelo lógico INRC. La selección de dos Instituciones uno estatal y otro privado, es intencional por razones metodológicas, se trata de una prueba de especialización y es aconsejable aplicarlo en una muestra no muy grande, con el objeto de que sea adecuadamente interpretado.

El objetivo general es conocer si existe correlación entre el nivel de inteligencia del periodo de las operaciones formales de Piaget y el rendimiento académico en Matemáticas en dos instituciones educativas, al ser del tipo descriptivo y correlacional, se utiliza el muestreo estratificado por proporciones. Los resultados señalan que es posible diseñar una propuesta para el fortalecimiento del pensamiento lógico formal.

Piaget ha demostrado que los niños piensan en forma diferente a los adultos, que su pensamiento se va desarrollando desde su nacimiento, pasando por una serie de etapas hasta adoptar el pensamiento de los adultos. Para llegar a estas conclusiones, utilizó durante los primeros años de vida, la observancia cuidadosa de sus reacciones frente a situaciones problemáticas. La preocupación permanente es como aprender de manera eficaz, tal como señala Jean Dieudonné la matemática es un campo en el que sólo se manejan abstracciones, lejos de la realidad concreta de la experiencia sensible (Piaget, Choquet et al., 1986).

EL PROBLEMA

Los factores que influyen en el rendimiento académico en Matemáticas son numerosos, autores bien calificados hablan de un bajo desempeño en esta asignatura. En el proceso enseñanza-aprendizaje se encuentra cuatro preguntas básicas que son: ¿Por medio de que

procesos o instrumentos fundamentales los niños aprenden? ¿Cuáles son los factores vitales que los niños y jóvenes hacen intervenir en el proceso educativo? ¿Qué condiciones facilitan u obstaculizan el aprendizaje? ¿Qué es lo que aprenden y pueden aprender los seres humanos? ¿Cuál es la amplitud y cuál es el límite de la aportación que el maestro puede hacer en condiciones favorables?

Las cuatro preguntas y respuestas, se ubican en el lenguaje, la psicología, el contenido y el método. Las aristas básicas académicas en el proceso educativo son: la comunicación con el lenguaje; la psicología con su aplicación en la educación; los contenidos con su semántica actual; y el método. De estas aristas académicas en el proceso educativo, nos interesa la psicología y su aplicación en la educación. Las teorías psicológicas que explican la enseñanza aprendizaje en matemáticas, son los de Skinner, Piaget, Ausubel y Gagné. Sin embargo, se ha prestado mayor atención a los de Jean Piaget, sobre cómo se desarrolló el pensamiento de los niños considerando diferentes edades; y las de Zoltan Dienes, sobre como aprender Matemáticas (Palomino, 1977; Gil y De Guzmán, 1993).

OBJETIVOS

General

- Determinar la correlación existente entre el nivel de inteligencia del período de las operaciones formales de Piaget y el rendimiento académico en Matemáticas en la I.E. Abraham Valdelomar y la I.E. Privada Arbulú de la ciudad de Ica.

Específicos

- Describir las causas de correlación entre el puntaje obtenido en el manejo del modelo lógico INRC y el rendimiento académico en Matemáticas en ambas Instituciones Educativas.
- Identificar si existe diferencias en los promedios de los puntajes obtenidos en el manejo del modelo lógico INRC en ambas Instituciones Educativas.

JUSTIFICACIÓN

Para Felipe Sebastiani (1994), de manera consciente e inconsciente se descuida la importancia que tiene la psicología aplicada a la educación. Por otro lado, Lorenzo Reyna (1993) sostiene que el material de trabajo de los docentes en el quehacer educativo es la mente del niño y que esta es materia sumamente delicada, de esta manera la psicología y su aplicación se convierten en una arista básica académica en el proceso educativo. El aporte, sobre cómo se desarrolla el pensamiento de los niños considerando diferentes

edades es fundamental en el proceso enseñanza aprendizaje, utilizar como un método para estudiar el desarrollo del pensamiento (Piaget, 1999).

1. Modelo lógico INRC

Considera como el adolescente manipula las conclusiones que ha derivado de un experimento. Existen cuatro reglas que el adolescente puede utilizar y manipular las funciones: Identidad (I), Negación (N), Reciprocidad (R) y Correlatividad (C). Hasta hace poco, se pensaba que todas las personas aprendían casi de la misma manera y que existía sólo una forma de enseñar. Hoy, se advierte la existencia de diferentes concepciones sobre la inteligencia humana y los estilos cognitivos que conduce a las personas al aprendizaje. La inteligencia es una realidad muy compleja de caracterizar, es un constructo utilizado para estimar, explicar o evaluar algunas de las diferencias conductuales de las personas: éxitos o fracasos académicos; forma de relacionarse con los demás; desarrollo de habilidades.

Gardner fundamenta su estructura en pruebas biológicas y antropológicas, especialmente en bases neurológicas, evolucionistas y transculturales, define una inteligencia como “la capacidad de resolver problemas, o de crear productos, que sean valiosos en uno o más ambientes culturales” (Gardner, 1993).

2. La psicología educativa y la Matemática

El Rendimiento Académico es entendido por Howard (1970) como una medida de las capacidades indicativas que manifiestan en forma estimativa, lo que una persona ha aprendido como consecuencia de un proceso de instrucción o formación. En cambio, Gardner (2000) ha puesto de manifiesto el problema que han tenido que afrontar todas las sociedades modernas al momento de resolver el problema educativo. Esto ha significado que cualquiera que sea el tipo de sociedad, debe adaptarse a formas tradicionales de transmisión del conocimiento.

Las Ciencias de la Pedagogía se entrelazan mejor para la formación de un sistema de educación eficiente a través del mundo. Entre diversas ciencias está la Psicología educativa, que viene en auxilio para el estudio de la Pedagogía y su efecto en los estudiantes como seres humanos con el fin de lograr experiencias de aprendizajes duraderos. El núcleo central entre estas dos ciencias es aquello que provee a la psicología educativa de una estructura científica constitutiva y propia, que viene conformado a través

del estudio del aprendizaje; como fenómeno psicológico que depende básicamente de las aptitudes, diferencias individuales y del desarrollo mental (Toranzos, 1992).

3. Teorías psicológicas que explican la enseñanza - aprendizaje de la Matemática

3.1 El aprendizaje según Skinner

B.F. Skinner el pionero de la Instrucción Programada; en 1968, formuló un método de enseñar y escribir denominado “Escribe y Mira” que empleaba un cuaderno especial y una tinta que solo era visible si el alumno escribía o anotaba la palabra correcta; esta técnica aseguraba una corrección instantánea y, por esta razón, es un esfuerzo eficaz. En la actualidad, tiene serias objeciones respecto a su incidencia en el aprendizaje, costos, elaboración de materiales, sin embargo, el enfoque de Skinner aún mantiene su importancia.

3.2 El aprendizaje según Jean Piaget

Piaget, no acepta una psicología científica que no sea la epistemología genética, la cual busca estudiar la naturaleza del conocimiento en función de su crecimiento. Sus estudios han demostrado que los niños poseen una especial capacidad para el autoaprendizaje, aun antes de recibir una instrucción formal. Según Piaget, estas experiencias deben comenzar desde muy temprana edad con el fin de compensar los procesos de adaptación de cada uno de los estadios de desarrollo. Presenta las siguientes características: (a) La dimensión biológica. Piaget plantea que el aspecto biológico de los individuos desarrolla un papel muy importante en el proceso del desarrollo intelectual; (b) Punto de vista interaccionista: el conocimiento debe ser entendido como una relación de interdependencia entre el sujeto cognoscente y el objeto de conocimiento, el sujeto cognoscente actúa sobre un objeto, determina dos tipos de abstracción: a nivel empírico, si extrae del objeto sus propiedades relativas; a nivel reflexivo, cuando extrae informaciones de las acciones que el sujeto ejerce sobre el objeto; el constructivismo genético: ningún conocimiento humano se encuentra preformado ni en las estructuras constituidas del sujeto ni en la de los objetos (Ginsburg y Oppen, 1982).

3.3. El aprendizaje según Dienes

Dienes sostiene que, para que el aprendizaje se produzca en Matemática, se requiere que se realice un proceso en el que se distingue seis etapas bien tipificadas: (1) Antes que el sujeto logre aprender algo es necesario e imprescindible que esté familiarizado con el mundo inmediato que lo rodea; (2) Continúa la adaptación pero se desarrolla con reglas

predeterminadas que orientan más claramente la actividad del individuo hacia los objetivos del aprendizaje; (3) En este nivel el individuo comienza a desechar todo aquello que no tiene una importancia significativa en la estructura, quedándose únicamente con lo significativo; es decir, el isomorfismo del juego; (4) Tener la idea de una estructura no es suficiente y está propenso al cambio u olvido, para un mejor dominio de la idea es necesario una representación esquemática de las mismas; (5) Cuando la idea está claro y bien representada, es necesario la comunicación, elaborar un lenguaje apropiado que constituye la base del futuro sistema de axiomas y las estructuras; (6) Organizar un sistema formal de conocimientos sobre la estructura en estudio, en Matemáticas este sistema tendrá axiomas, demostraciones y teoremas; es la etapa de la formalización.

4. Factores que influyen en el desarrollo intelectual

Según Piaget, la mente humana, en lugar de realizar pasivamente una copia mental de la realidad, hace una copia física, nuestra mente interpreta la información recibida de la realidad y construye activamente una representación de ella, y Piaget señala los factores que influyen en el desarrollo intelectual.

- **El balance entre la estabilidad y el cambio:** en el proceso de asimilar nuevas experiencias dentro de nuestro marco de referencias nos resistimos al cambio, a tal grado que nuestras percepciones pueden ser tergiversadas para ajustarse al marco existente. En cada nivel superior de comprensión, el ser humano debe estar dotado de una estructura más amplia o patrones de pensamiento más complejos.
- **La maduración:** mientras más años tenga un niño es más probable que tenga un mayor número de estructuras mentales que actúan de manera organizada. Es recién alrededor de los 15 o 16 años que el sistema nervioso, las habilidades motoras y perspectivas logran alcanzar su madurez.
- **La experiencia física:** cuando más experiencia posea un niño con objetos físicos de su medio ambiente es más probable que desarrolle un apropiado conocimiento de ello.
- **La interacción social:** este factor se refiere a la importancia que tiene las relaciones del niño con personas que les presenten otros puntos de vista esta experiencia les estimula a pensar utilizando diversas opiniones. Durante la etapa del desequilibrio, cuando el niño comienza a sentir las contradicciones en su razonamiento, parece haber una ruptura en sus estructuras estables intelectuales existentes seguida de una reorganización en los patrones de su pensamiento hacia nuevas estructuras.

5. El aprendizaje según David Ausubel

Centró su investigación sobre el aprendizaje interesándose en los tipos como se presentan en la escuela y que, son dos: el aprendizaje por recepción y el aprendizaje verbal por descubrimiento. Su teoría se centra en lo que él denomina aprendizaje verbal significativo que señala su viabilidad gracias a una estructura cognoscitiva. Afirma que si conceptos pre-existentes son estables y claros se conseguirán significados precisos que podrán ser retenidos; en cambio, si es inestables y mal organizados el aprendizaje será inhibido. Respecto a un método de estudio en esta ciencia, el alumno caerá en un engaño al creer que aprende Matemática estudiando de memoria una serie de conceptos abstractos. No debe olvidarse que el primer objetivo de la enseñanza - aprendizaje de la Matemática debe ser el desarrollo progresivo de las destrezas mentales de los alumnos.

6. El aprendizaje según Robert Gagné

Para Gagne el propósito de cualquier programa de educación debe ser el promover el aprendizaje; debe tratarse de capacitar a las personas para que puedan modificar su conducta con una cierta rapidez y en una forma más o menos permanente. Esta teoría es cognoscitiva; según ella, el aprendizaje es considerado como un conjunto de acciones cuya función es transformar o procesar la información que ingresa al sistema humano de una manera análoga al funcionamiento de una computadora.

Para Gagne, el aprendizaje se produce como una consecuencia de la interacción entre el alumno y el medio ambiente que lo rodea. Así se tiene que la información del medio ambiente que le interesa, motiva o impresiona, afecta sus órganos receptores e ingresa al sistema nervioso mediante el registro sensorial que es la estructura responsable de la percepción inicial que el alumno observa, percibe, escucha y toca.

Lo percibido ingresa a la memoria a corto plazo donde la información se vuelve a cifrar en forma de concepto. Su permanencia en este tipo de memoria es de pocos segundos pasando luego a la memoria a largo plazo (Gagné et al., 1975).

Es posible clasificar estas múltiples formas de comportamiento para comprender y mejorar el proceso del aprendizaje. Sostiene que los resultados de este aprendizaje establecen cinco clases de facultades; estas son: Información verbal, habilidades intelectuales, estrategias cognoscitivas, aptitudes y habilidades motoras.

7. Las etapas del desarrollo del pensamiento formal según Piaget

El pensamiento formal aparece a partir de los 12 o 13 años, se caracteriza por el desarrollo de la habilidad para pensar más allá de la realidad concreta, ya puede entender plenamente, generar abstracciones verbales y proposicionales en vez de objetos concretos; teóricamente, puede estudiar Geometría, sin embargo, sugiere que, por ser de mayor comprensión, se utilice el método inductivo.

En el período de operaciones formales, el sujeto es capaz de razonar correctamente, sobre proposiciones o hipótesis, aprende a obtener las conclusiones necesarias a partir de verdades posibles, el sujeto tiene la posibilidad de razonar con rigor, lo que constituiría el comienzo del pensamiento hipótesis deductiva (Piaget, 1995). Esta etapa se caracteriza de acuerdo con el autor por la posesión de ocho esquemas. Los esquemas son estructuras mentales que le permiten al sujeto incorporar experiencias (asimilación) o conocimientos e integrarlos (acomodación) a los que ella posee, de acuerdo con la teoría de equilibración. Estos esquemas son: compensaciones multiplicativas, pensamiento correlacional, pensamiento probabilístico, pensamiento combinacional, pensamiento proporcional, formas de conservación sin verificación directa, equilibrio mecánico y la coordinación de dos o más sistemas de referencia. Por otro lado, en lo que se refiere a las capacidades específicas entendemos: como aquellas capacidades especializadas para el pensamiento, que con la mediación cultural y el hecho de que el pensamiento se funde en la actividad implican la especificidad contextual de los procesos mentales.

Tal como corrobora Gardner “para aquellos adolescentes que se encuentran en la etapa formal operativa, la presencia de estímulos concretos y la necesidad de actividades concretas ya no es necesaria. Un operador formal es capaz de razonar exclusivamente en el terreno de las proposiciones” (Gardner, 1993; p. 41). Mediante un aprendizaje informal se puede memorizar unos cuantos textos aislados e incluso aprender una disciplina. Pero cuando lo importante es el conocimiento de varias disciplinas y sistemas simbólicos, la enseñanza formal demuestra todo su potencial” (Gardner, 2000).

8. El modelo lógico INRC de Piaget y las estructuras Matemáticas

La Matemática se encuentra presente en las teorías Piagetana, que considera las estructuras fundamentales: algebraicos, topológicos y de orden, como modelo de estructura cognoscitiva. Esto lo confirma Piaget, en su artículo: “Las estructuras Matemáticas y las estructuras operatorias de la inteligencia”, sobre todo, las operaciones

lógicas que requiere condiciones necesarias previas, se encuentran en todas las etapas, primero, una tendencia a la organización de totalidades o sistemas, fuera de las cuales los elementos carecen de significado y aún de existencia, y enseguida, una distribución de estos sistemas de conjuntos según tres especies de propiedades que corresponden precisamente a las de las estructuras algebraicas, las estructuras de orden y las estructuras topológicas” (Piaget, Beth y Dieudonné et al., 1971).

Es preciso señalar en la base de los modelos de Piaget de las estructuras elementales de la inteligencia, está el criterio de reversibilidad que constituye “ley fundamental de las composiciones propias de la inteligencia” que se presentan desde los esquemas sensoriomotrices bajo dos formas complementarias e irreducibles: la inversión o negación y la reciprocidad.

La reversibilidad significa hacer algo que anule o compense una acción previa, de modo que tenga una situación similar a la que tuvo antes.

Tal como señala Piaget sobre estas dos formas de reversibilidad “que encontramos de nuevo juntas a lo largo de todo el desarrollo y que sólo llegarán a una síntesis en un sistema único cuando, al nivel de las operaciones formales, después de los 11 años, se constituyan el grupo de las cuatro transformaciones interproposicionales” (Piaget et al, 1971, p. 10).

En cuanto a la vinculación con el aprendizaje de la Matemática, se puede indicar que mientras no haya reversibilidad en el pensamiento, no pueden existir en el niño nociones de conservación.

Estructuras algebraicas. Son relaciones donde se definen como “leyes de composición”; esto es, relacionar tres elementos del conjunto, de modo que uno de ellos queda determinado de manera única en función de los otros dos. Una estructura algebraica de vital importancia es la estructura de grupo; según Piaget, expresa algunos de los mecanismos más característicos de la inteligencia.

Se explica así, si G es un conjunto cualquiera se define una ley de composición, tal que se cumpla:

- Que el conjunto G sea cerrado respecto a tal ley;
- Que todo elemento de G tenga un correspondiente elemento inverso
- Que existe un elemento identidad en G , y

- Que la ley de composición sea asociativa, diremos que tal conjunto, con su ley de composición, tiene una estructura de grupo (Piaget, Beth y Dieudonné et al., 1971, p, 11).

Al respecto, Malaspina, señala, “debemos reconocer que desde el punto de vista del rigor matemático estas afirmaciones no son suficientemente claras, pero Piaget estaba convencido de que el grupo es la “traducción simbólica” de algunos de estos caracteres fundamentales del acto de inteligencia: la posibilidad de una coordinación de las acciones; la posibilidad de los retornos (se está refiriendo a la existencia del inverso de cada esquema en acción; es decir, a la reversibilidad), y la posibilidad de los giros, se está refiriendo a la asociatividad” (Thorne, 1997).

Estructura de orden: podemos afirmar que son estructuras de relaciones y no de operaciones, claramente la relación se define para dos elementos del conjunto, esta relación cumple con la propiedad de: reflexibilidad, antisimétrica y transitiva; además, dos elementos de un conjunto tienen un supremo e ínfimo, Piaget llama reticulado y señala la reversibilidad en el retículo, no en forma de inversión sino en forma de reciprocidad; esto es, una transformación con el orden permutado, pero sin negación de las operaciones que intervienen.

Estructuras topológicas: tiene que ver con nuestra concepción del espacio, Tola Pasquel da un concepto de topología como “la topología propiamente dicha, estudia las propiedades que no cambian por transformaciones que tienen lugar entre espacios en los que no necesariamente existe una noción de distancia, existe una manera de determinar la cercanía o proximidad de los elementos, tales conjuntos se llaman espacios topológicos” (Tola, 1992).

En la medida que se entiende la vinculación de la topología con la geometría se puede también entender la importancia que le dio Piaget a estas estructuras, observando que el niño va aprendiendo a comprender el espacio y señalando criterios de curva cerrada, su interior y exterior, fronteras, concepto de cercanía (Piaget y Bárbel, 1983).

9. Análisis del funcionamiento del modelo lógico INRC

El grupo señalado contiene cuatro transformaciones, esto es el grupo de Klein, que se define en la forma:

- **La inversa o negación (N)** es su complementaria en el conjunto de asociaciones de base;

- **La recíproca (R)**, de una operación es la misma operación entre proposiciones negadas;
- **La correlativa (C)**, de una operación resulta de la permutación de los (\vee) y de los (\wedge).
- **La transformación idéntica (I)** deja intacta la operación.

Dos operaciones proposicionales para implicaciones asociadas: el condicional \rightarrow , que llamamos directo; en conexión con él, se presentan otros tres, obtenidas por permutaciones y negaciones del antecedente y consecuente: \rightarrow recíproco; $\sim \rightarrow \sim$ contrario; $\sim \rightarrow \sim$ contra recíproco. Las cuatro implicaciones propuestas se llaman conjugadas, y cualquiera de ellos puede formarse como directa, las implicaciones contra recíprocas son tautológicas.

Veamos las negaciones, reciprocidades, correlatividades e identidades:

Negación: $(\vee) = (\sim \wedge \sim)$

Reciprocidad: $(\vee) = (\sim \vee \sim)$

Correlatividad: $(\vee) = (\wedge)$

Si combinamos algunas de estas operaciones se deduce que:

$$= \sim (\sim \vee \sim) =$$

$$= \sim (\wedge) = (\sim \vee \sim) =$$

$$= (\sim \wedge \sim) =$$

$$= \sim (\sim \wedge \sim) = \vee =$$

Piaget dice que “se comprueba que este grupo INRC constituye una estructura algebraica, se incorpora, no obstante, las reciprocidades que constituyen la forma de reversibilidad de las estructuras de orden. Psicológicamente, este grupo constituye a la vez la síntesis y la forma de equilibrio final de las series de estructuras operatorias hasta allí distintas y fundadas la una sobre inversión y la otra sobre la reciprocidad” (Piaget, 1994; Piaget, 1995).

METODOLOGIA

Tipo de estudio descriptivo correlacional; población 343 estudiantes de ambos sexos del cuarto y quinto grado de secundaria, matriculados en la I.E. Abraham Valdelomar y I.E. Privada Arbulú; la muestra 143 estudiantes, muestras que se obtuvo utilizando la ecuación de muestreo simple para estudio de promedio, considerando 5% de error; nivel de confianza = 1,96 y máxima variabilidad = 0,5 y = 0,5; con ajuste al tamaño de la población. La variable independiente: nivel de inteligencia del periodo de las operaciones

formales de Piaget, cuyo indicador es el puntaje obtenido en el manejo del modelo lógico INRC, aplicación de cuestionario. La variable dependiente: rendimiento académico en Matemáticas, el indicador son las notas obtenidas del registro del profesor. El instrumento se caracterizó por ser una prueba objetiva estructurada de 20 reactivos 17 cerrados con opción múltiple y tres abiertas. De acuerdo a Tirado Segura, la prueba de opción múltiple tiene cuatro características principales: (1) si se sabe la respuesta correcta, las alternativas no ayudan ni confunden; (2) si no se sabe con certeza, pero se tiene una idea, las alternativas ayudan a reconocer y a confirmar la respuesta correcta; (3) si se tiene una idea vaga de la respuesta correcta, las alternativas se vuelven una fuente de confusión; si no se tiene ni siquiera una idea de la respuesta, las alternativas no ayudan ni confunden” (Tirado; 1986).

En la elaboración del instrumento se utilizaron el plan de programas de educación secundaria, fuente MINEDU, siendo la base los objetivos y fundamentos teóricos del modelo lógico INRC.

Bloques	Reactivos	Indicadores	Características
I	7	Uso de conceptos- pensamiento operativo concreto	Responden al objetivo de aprendizaje. Es claro, preciso y delimitado. Está exento de pretensiones capciosas. Está exento de claves que lleven a la respuesta correcta. Es independiente, su solución no depende de las respuestas de otros reactivos. Tiene un grado de dificultad acorde con el criterio de logro de aprendizaje que se espera.
II	3	Tránsito concreto formal	
III	3	Pensamiento lógico	
IV	4	Pensamiento lógico formal	
V	3	Pensamiento lógico formal construcción de modelos	

Bloque I, pensamiento operativo concreto: Los reactivos tiene característica señalados por J. Piaget, el pensamiento operativo concreto se forja entre 7 y los 11 años, en esta etapa el ser humano es capaz de mostrar el pensamiento lógico ante los objetos físicos. Una facultad recién adquirida de reversibilidad le permite invertir mentalmente una acción que antes sólo había llevado a cabo físicamente. Aparecen los esquemas para las operaciones lógicas de seriación y clasificación. Por lo general en esta etapa operativa

concreta todavía no es posible aplicar la lógica a problemas hipotéticos, exclusivamente verbales o abstractos.

Bloque II, transición pensamiento concreto formal: los reactivos puntualizan el estadio intermedio entre la capacidad operativa concreta y la formal.

Bloque III, pensamiento lógico matemático: para evaluar esta cualidad del pensamiento, los reactivos deben recoger a partir de una lectura bastante crítico analítica del enunciado permita deducir la solución, la finalidad es medir su capacidad de generalización a partir de un conjunto de premisas.

Bloque IV, pensamiento lógico formal: etapa caracterizada por la forma de pensar más allá de la realidad concreta; ya puede pensar acerca de relación de relaciones y otras ideas abstractas, la capacidad de manejar a un nivel lógico, enunciados verbales y proposiciones en vez de objetos concretos únicamente, entender las abstracciones simbólicas generadas por el álgebra.

Bloque V, pensamiento lógico formal y construcción de modelos: tres reactivos, sin alternativas, el propósito es pedir que escriban las expresiones matemáticas; es decir, conjunto de ecuaciones que al juicio del alumno expresen con claridad la solución del problema, concretamente que sepan hacer modelos matemáticos.

Identidades (I), negaciones (N), reciprocidades (R) y correlatividad (C)

La mayor parte de los reactivos que cambian en su interpretación están implicadas la seriación, clasificación y se reduce al algoritmo lógico de la forma $- =$, donde está inmerso la inversión o negación. Entonces, la solución de los reactivos requiere de estrategias cognoscitivas como la clasificación, reconocer que la resta es una operación inversa a la suma, hay una reversibilidad: negación, reciprocidad. Los reactivos que no pueden ser resueltos en una sola operación, para dar solución es necesario determinar el segundo término. El sujeto debe desarrollar la capacidad para reconocer que los datos por sí sólo, no determina la solución. así como, la capacidad de discriminar la solución simplificada de los datos; esto es, correlacionar variables.

Al respecto Piaget afirma “las tres estructuras fundamentales sobre las cuales reposa el edificio matemático, según el grupo Bourbaki, serían las estructuras algebraicas, cuyo prototipo es el grupo, las estructuras de orden y las estructuras topológicas” (Piaget, 1965).

El grupo de los cuatro elementos de Klein

Fue necesario un reactivo que consiste en el conjunto { , , , } de los cuatro elementos de Klein, para el cual dado una ley de composición definida por una tabla de doble entrada se pide la construcción del grupo de Klein para el conjunto {2,3,4,5}, en este caso el estudiante debe descubrir la analogía, observando la diagonales y las simetrías que presentan, pero en forma abstracta.

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

Análisis univariado: para abrir el análisis de información empírica de la variable independiente se procedió a calificar el cuestionario, hacer un cuadro comparativo entre ambos colegios, los porcentajes de aciertos y errores de los alumnos examinados, considerando el rango de respuestas que oscila entre 0 a 20, para la variable dependiente, se procedió a obtener las notas del rendimiento académico en Matemáticas extraídas del registro del profesor.

Los cuadros muestran el promedio de respuestas correctas y erróneas, bloques donde el grupo demuestran tener solvencia respecto del uso de conceptos y del pensamiento operativo concreto, bloques donde demuestra capacidad para resolver problemas con cierto grado de dificultad, evidencia donde el porcentaje de respuesta inadecuadas a problemas atinentes a construcción de modelos matemáticos a partir de un enunciado.

Respuestas para cuarto grado de secundaria I.E Abraham Valdelomar - Población:157 Muestra: 57			
Bloque	Número de reactivos	% Promedio de respuestas correctas por bloques	% Promedio de respuestas erróneas por bloques
I	7	45.11	54.89
II	3	29.82	70.18
III	3	40.35	59.65
IV	4	44.74	55.26
V	3	0	100

Respuestas para el cuarto grado de secundaria I.E. Privada Arbulú - Población: 29 Muestra: 20			
Bloque	Número de reactivos	% Promedio de respuestas correctas	% Promedio de respuestas erróneas
I	7	61.43	38.57
II	3	68.33	31.67
III	3	40.00	60.00
IV	4	67.5	32.5
V	3	13.33	86.67

Respuestas para el quinto grado de secundaria I.E. Abraham Valdelomar - Población: 105 Muestra: 38			
Bloque	Número de reactivos	% Promedio de respuestas correctas por bloques	% Promedio de respuestas erróneas por bloques
I	7	53.38	46.62
II	3	53.51	46.49
III	3	44.74	55.26
IV	4	61.18	38.82
V	3	7.89	92.11

Respuestas para el quinto grado de secundaria I.E. Privada Arbulú - Población: 42 Muestra: 30			
Bloque	Número de reactivos	% Promedio de respuestas correctas	% Promedio de respuestas erróneas
I	7	55.24	44.76
II	3	60.00	40.00
III	3	53.33	46.67
IV	4	70.00	30.00
V	3	31.11	68.89

Los siguientes cuadros muestran las pruebas estadísticas, el nivel de significancias por grado de estudios, las reacciones en cada bloque, la evolución del nivel de abstracción comparados, limitación para elaborar un algoritmo matemático respecto de un problema.

Nivel	z_c	Significación
I	-0.403	No
II	-0.928	No
III	-1.220	No
IV	-1.514	No
V	-4.273	Si

Nivel	z_c	Significación
I	-3.322	Si
II	-5.242	Si
III	0.048	No
IV	-3.504	Si
V	-4.860	Si

Análisis bivariado: para probar las hipótesis, se procedió a realizar la estimación de variables con el objeto de determinar el grado de significación, el tipo de curva que se ajustó mejor a nuestro trabajo es la regresión lineal, a un nivel de confiabilidad del 95%, con un valor de $\alpha = 0,05$ el grado de asociación se evidencia en el siguiente cuadro.

Estadística de la Regresión

Ajustes	Cuarto grado I.E. Abraham Valdelomar	Quinto grado I.E. Abraham Valdelomar	Cuarto grado I.E. Privada Arbulú	Quinto Grado I.E. Privada Arbulú
Coefficiente de correlación	0,217980	0,143488	0,174883	0,249587
Coefficiente de determinación	0,047515	0,020588	0,030584	0,062293
ajustado	0,030197	-0,006616	-0,023272	0,028804
	0,1628	0,855	0,729	1,325
Muestra	57	38	20	30

Validación de las hipótesis

Hipótesis 1: fue planteado como la existencia de correlación entre el puntaje obtenido en el manejo del modelo lógico INRC y el rendimiento académico en Matemáticas en la I.E. Abraham Valdelomar, haciendo la prueba de significación de $\alpha = 0,01673$, mediante la transformación $t = 2,023$ queda validado.

Hipótesis 2: fue planteado como la existencia de correlación entre el puntaje obtenido en el manejo del modelo lógico INRC y el rendimiento académico en Matemáticas en la I.E.

privada Arbulú de la ciudad de Ica, con la prueba de confiabilidad al 95% y $\alpha = 0,05$ queda validado.

Hipótesis 3: que afirmaba, el promedio de los puntajes obtenidos del manejo del modelo lógico INRC en la I.E. privada Arbulú es mayor que en la I.E. Abraham Valdelomar; aplicando la prueba diferencia de medias se obtuvo $\bar{x} = 12,467$ y queda probada, siendo $\bar{y} = 11,26$ y $\bar{z} = 7,39$, con desviaciones típicas 2,7792 y 2,5865 respectivamente.

CONSIDERACIONES FINALES

Existen situaciones que rebasa el objetivo de la investigación y, es conveniente hacer una reflexión en torno al hecho de que el aprendizaje manifestado por los estudiantes responde a una experiencia del propio proceso de aprendizaje. Ante los bajos resultados obtenidos por respuestas a diferentes ítems, cabe preguntarse por la profundidad y significación con que se abordan los temas en el aula; pese a cambios continuos de los programas curriculares, todo parece indicar que la asignatura de Matemática continúa siendo abordada a través de procesos tradicionales, y se descuida la exigencia de propiciar en el alumno el desarrollo de las capacidades cognitivas que le permitan y ayuden a fortalecer su capacidad de abstracción.

El desarrollo del razonamiento lógico implica que el alumno formule juicios inductivos y analógicos en forma ordenada y secuencial, aplicar el razonamiento formal en el aprendizaje permite adquirir la capacidad para dominar alternativas, juicios e hipótesis.

Los resultados manifiestan que el nivel de respuestas correctas relativamente bajo, puede deducirse de la teoría de Piaget que, conforme a la edad, su proceso de desarrollo cognitivo introduce al sujeto en un período de operaciones formales en donde la abstracción es primordial.

La existencia del nivel de asociación resulta importante, sobre todo como lo señala J. Dieudonné, las matemáticas es un campo en el que sólo se manejan abstracciones. En los medios docentes de un modo especial, se suele deplorar este estado de cosas; significa tampoco poner al alumno desde el principio en contacto con concepciones demasiadas abstractas para sus posibilidades de asimilación, si no que la Matemática debe presentarse a su verdadera luz a medida que se dibujan en el adolescente las estructuras del pensamiento (Piaget, Beth, Dieudonné et al., 1971 p. 42).

Queda claro entonces, que si al niño se le estimula tempranamente a realizar: identidades, negaciones, reciprocidades y correlatividades, mejoraría mucho su rendimiento

académico, estimular a concebir la Matemática como una forma de pensar, matematizar el mundo físico que lo rodea, y no solo como un conjunto de conocimiento que debe aprender y memorizar.

La mayoría de los educandos difieren mucho en cuanto al nivel de maduración en las tareas y actividades que realiza, algunos alcanzan las últimas etapas mentales aun cuando llega a la adultez. Piaget sugiere que tengamos presente esta individualidad en la tarea educativa porque no todos los adultos alcanzan el mismo nivel de maduración en las tres formas de inteligencia. Pero lo importante de todo esto es que no existe primacía de una forma de inteligencia sobre otra, todas las necesitamos en un determinado momento de nuestra vida, de allí que es bueno mirar los resultados para poner énfasis y desarrollar también las formas de inteligencias motora y práctica que son las que dan el soporte a la abstracción.

REFERENCIAS

- Gagné R. M. y Briggs, Leslie J. (1975). *El diseño de secuencia del proceso educativo en tecnología educativa*, Retablo de papel, ediciones, vol. II. Lima.
- Gardner Howard. (2000). *La educación de la mente y el conocimiento de las disciplinas*, Editorial Paidós, España.
- Gardner Howard. (1993). *La mente no escolarizada, como piensan los niños y como deberían las escuelas*, Ediciones Paidós Ibérica, S.A.; España.
- Gil Pérez, D.; De Guzmán Ozámiz, M. (1993). *Enseñanza de las ciencias y la Matemática, tendencias e innovaciones*, Editorial popular S.A. España.
- Ginsburg, H.; Opper, S. (1982). *Piaget y la teoría del desarrollo intelectual*, Prentice/Hall Internacional, México.
- Howard F. Fehr. (1970). *Enseñanza de la Matemática*, ©Librería del colegio, Argentina.
- Labinowicz Ed. (1987). *Introducción a Piaget*. Editorial Addison Wesley Iberoamericana, Delaware.
- Palomino, L. (1977). *Teoría Básica de la Educación: Bases psicológicas*, Lima, Perú.
- Piaget, J.; Choquet G.; Dieudonne J. y Otros. (1986). *Enseñanza de las matemáticas modernas*, © Alianza editorial, España.
- Piaget, J; Beth, E. W.; Dieudonne J.; Lichnerowicz; Choquet G., Gattegno G. (1971). *La enseñanza de las matemáticas*, Aguilar S. A. ediciones, España.

- Piaget, J. (1965). *Las estructuras matemáticas y las estructuras operativas de la inteligencia*. Editorial Aguilar. Madrid.
- Piaget, J. (1975). *Seis estudios de psicología*. Editorial Seix Barral, S.A. Barcelona.
- Piaget, J. (1999). *Psicología de la Inteligencia*. Editorial Psique, Madrid.
- Piaget, J. (1994). *Psicología del niño*, Ediciones Morata, España.
- Piaget, J. (1995). *La construcción de lo real en el niño*, Editorial Grijalbo, México. Piaget, J.; Bárbel Inhelder. (1983). *Génesis de las estructuras lógicas elementales, clasificaciones y seriaciones*, Editorial Guadalupe, Argentina.
- Reyna Napán, L. (1993). *Didáctica de la matemática desde otra perspectiva*. Ediciones el ALBA, Lima.
- Sebastiani, C. Felipe. (1994). *Didáctica de la matemática*. Sebastiani editores S.A. Lima.
- Thorne, Cecilia (Editores). (1997). *Piaget entre nosotros*. Fondo Editorial Pontificia Universidad Católica. Lima.
- Tirado Segura, Felipe. (1986). *La crítica situación de la educación básica en México*, Vol. XII, N° 71, CONACYT, México.
- Tola Pasquel, J. (1992). *Introducción a la topología*. Fondo Editorial, PUCP, Lima.
- Toranzos Fausto I. (1963). *Enseñanza de la Matemática*, Editorial Kapelusz, Argentina