

## Aplicación de Algoritmos de Estimación de Imágenes con Modelización Bayesiana

**Danny Alexis Benavides Caipe\***

[danny.benavides@upec.edu.ec](mailto:danny.benavides@upec.edu.ec)

Universidad Politécnica Estatal  
del Carchi, Posgrado  
Ecuador

**Iván Gabriel Mafla Bolaños**

[gabriel.mafla@upec.edu.ec](mailto:gabriel.mafla@upec.edu.ec)

<https://orcid.org/0000-0003-1841-2831>

Universidad Politécnica Estatal  
del Carchi, Posgrado  
Ecuador

### RESUMEN

En este trabajo se analiza el proceso de estimación de imágenes en todas sus etapas, desde la definición de la ecuación de formación de una imagen, hasta la inferencia matemática y estadística para la comprensión de los métodos de solución. La inferencia estadística y el uso de teoremas como el de Bayes y Central del Límite son esenciales para la explicación de los modelos de ruido, el comportamiento de las partículas de luz y el funcionamiento de los algoritmos de solución, además de los parámetros que consideran. Se realiza la simulación y deconvolución de la imagen del asteroide Bennu. Se simula la pérdida de resolución espacial con las PSFs modeladas de los telescopios Hubble y James Webb en presencia de ruido de Poisson y de ruido blanco Gaussiano (AWGN). Para la deconvolución se emplean el Filtro Wiener supervisado y el no supervisado, el algoritmo de Richardson - Lucy y un algoritmo de medias no locales. La reconstrucción se mide con el error medio cuadrático (MSE) y el pico de relación señal-ruido (PSNR). Para las imágenes con ruido de Poisson, los resultados fueron mejores con el algoritmo de Richardson-Lucy (R-L) y para las imágenes con ruido AWGN con el Filtro Wiener Supervisado, el cual presentó valores de MSE menores que el no supervisado en todos los casos. Con el algoritmo de Non-local means (NLM) en modo rápido con sigma provista se consiguió una pequeña mejora, pero de menor calidad que con los otros métodos.

**Palabras clave :** *inferencia estadística; teorema de bayes; teorema central del límite; filtro wiener; algoritmo richardson-lucy..*

---

\* Autor principal

Correspondencia: [danny.benavides@upec.edu.ec](mailto:danny.benavides@upec.edu.ec)

# Application of Image Estimation Algorithms with Bayesian Modeling

## ABSTRACT

This paper analyzes the image estimation process in all its stages, from the definition of the image formation equation, to the mathematical and statistical inference for the understanding of the solution methods. Statistical inference and the use of theorems such as Bayes and Central Limit theorems are essential for the explanation of the noise models, the behavior of the light particles and the performance of the solution algorithms, as well as the parameters they consider. The simulation and deconvolution of the image of the asteroid Bennu is performed. The loss of spatial resolution is simulated with the modeled PSFs of the Hubble and James Webb telescopes in the presence of Poisson noise and white Gaussian noise (AWGN). The supervised and unsupervised Wiener Filter, the Richardson - Lucy algorithm and a non-local averaging algorithm are used for deconvolution. The reconstruction is measured with the mean squared error (MSE) and the peak signal to noise ratio (PSNR). For images with Poisson noise, the results were better with the Richardson-Lucy (R-L) algorithm and for images with AWGN noise with the Supervised Wiener Filter, which presented lower MSE values than the unsupervised one in all cases. With the Non-local means (NLM) algorithm in fast mode with sigma provided a small improvement was achieved, but of lower quality than with the other methods.

**Keywords :** *statistical inference; bayes theorem; central limit theorem; wiener filter; richardson-lucy algorithm.*

*Artículo recibido 22 agosto 2023  
Aceptado para publicación: 26 setiembre 2023*

## INTRODUCCIÓN

La estimación de imágenes es un proceso que permite suavizar las imperfecciones dentro de una imagen captada de un objeto real, considerando que la actividad de captura de la imagen está expuesta a varios tipos de alteraciones conocidas como ruido (Garvanova & Ivanov, 2021). El ruido se produce por factores que afectan al objeto electrónico con el que se toma la imagen, así como también los factores físicos del usuario y del ambiente.

Matemáticamente una imagen es el resultado de la convolución de la imagen original y la función de dispersión de punto (PSF), la cual describe el comportamiento del sistema óptico a fuente de luz, y a esto se adiciona un ruido (Garvanova & Ivanov, 2021). El ruido estará presente siempre, debido a que un objeto real es una fuente de luz que ocupa un espacio significativo dentro del plano de la imagen y a esto se le adiciona que la realidad se compone de varios objetos, por lo que los fotones se esparcen dentro del plano de la imagen para formarla, captando todos los objetos presentes dentro del rango del dispositivo que se esté utilizando. El proceso de acercar o alejar una imagen para analizar su entorno o bien una parte específica puede significar la pérdida de información y el aumento del ruido debido a la aparición o eliminación de píxeles que hace que una imagen pierda resolución.

El tipo de método a utilizar para la estimación de la imagen depende del tipo de ruido que contenga y el parámetro de regularización que se defina, por esto es importante caracterizar detalladamente los tipos de ruido, como reconocerlos y la distribución estadística que lo represente, además de establecer el método o métodos y en qué condiciones trabaja mejor con un tipo de ruido específico, para eso necesario realizar varias pruebas y analizar los resultados tanto visual como matemáticamente.

La degradación de la imagen del asteroide se simula como una convolución de la PSF con ruido aditivo, produciendo una imagen emborronada, que limita la identificación de detalles y extracción de información (Shorman & Pitchay, 2015). En este trabajo se utilizan cuatro métodos de deconvolución: los Filtros Wiener supervisado y no supervisado, el algoritmo R-L y un algoritmo de medias no locales (NLM) utilizando paquetes de análisis de imágenes y astronómicos en Python. El Filtro Wiener minimiza el MSE entre la imagen reconstruida y la tomada como real, asumiendo que el ruido tiene media cero y función de degradación de la imagen conocida. Está optimizado para AWGN y presenta dos variantes: el supervisado, donde se provee al algoritmo el valor del parámetro de regularización

lambda ( $\lambda$ ) con base en un bajo MSE y el no supervisado que realiza el proceso de forma automática (Shorman & Pitchay, 2015; Wang, Zhou, & Yan, 2018).

El algoritmo R-L es un método iterativo y no lineal que se detiene cuando se ha alcanzado la convergencia en el MSE o el número máximo de iteraciones. Es óptimo para tratar ruido de Poisson y depende de la calidad de la PSF. A más iteraciones, amplifica el ruido e introduce distorsiones en los bordes de la imagen (Shorman & Pitchay, 2015; Wang, et al., 2018). El algoritmo NLM reemplaza el valor de un píxel por un promedio de una selección de otros valores de píxeles cercanos al píxel de interés. Presenta cuatro variantes: el modo lento (slow), aplica una ponderación gaussiana espacial a las distancias entre píxeles; el modo rápido (fast), emplea una ponderación espacial uniforme en los píxeles. Para los dos modos, si se proporciona la desviación estándar de ruido, sigma, la varianza de ruido esperada se resta al calcular las distancias de píxeles (Bo, Junrui, Xuegang, Huajun, & Sen, 2019; scikit-image, s.f). Para evaluar la calidad de la reconstrucción, se usan el MSE y la PSNR (para el algoritmo NLM). El MSE mide el error medio cuadrático entre la imagen estimada y la imagen deseada. La PSNR se define a partir del MSE y mide la relación entre la potencia máxima posible de una señal y el poder de corromper el ruido que afecta la fidelidad de su representación, expresada en dB. Los valores aceptables para la PSNR están entre 20 dB y 25 dB, y para la mejora en un incremento de 0.5 dB respecto a la imagen con ruido. (Shorman & Pitchay, 2015; Sara, Akter, & Uddin, 2019; Bo, et al., 2019).

## **METODOLOGÍA**

Para el desarrollo del estudio, se realiza una descripción teórica y analítica de los parámetros matemáticos que intervienen en la estimación de imágenes, relacionándolos con el Teorema de Bayes para su demostración y aplicación.

La PSF describe el comportamiento de un sistema óptico frente a una fuente de estímulo puntual, de esta manera se puede explicar que en un sistema ideal los fotones deberían impactar en un mismo punto, lo que no ocurre debido a fuentes de ruido y es cuando se da la pérdida de la información de la imagen, para lo cual se utiliza el principio de la probabilidad condicional, definido por el teorema de Bayes, para tratar de estimar el objeto original a partir de la imagen. La PSF también puede analizarse como una función de densidad de probabilidad, en donde la sumatoria de todos los eventos posibles debe ser igual

a 1. Cada fotón que impacta en un píxel comprende un evento, es decir, que la sumatoria de la probabilidad de que los fotones impacten en un píxel específico es igual a 1. La PSF se determina a partir de todos los elementos que provocan ruido dentro de una imagen y que por tanto impiden que los fotones impacten en un solo punto, pero se debe tener en cuenta que esta función siempre será una estimación de la ecuación original, dado que la presencia de agentes externos o cualquier tipo de evento que pueda afectar a la calidad de la imagen altera la PSF, haciendo imposible su determinación exacta (Garvanova & Ivanov, 2021).

Para expresar matemáticamente la PSF se puede denotar con la ecuación:

$$i = H(o) + n, \quad \diamond \tag{1}$$

En donde hace referencia a una imagen,  $o$  es el objeto real,  $H$  es la función de transformación que mapea  $o$  en  $i$ ,  $n$  es un modelo de ruido y el operador  $\diamond$  implica que el ruido tiene cierta dependencia con el valor no ruidoso de los elementos de la imagen (Garvanova & Ivanov, 2021). Si el término  $H$  es invariante a traslaciones, es decir que sin importar la posición o el tiempo entregará siempre el mismo resultado, entonces  $H$  es un operador convolucional y existe una función  $h$  llamada PSF tal que:

$$i = h * o + n \tag{2}$$

En donde el operador  $*$  denota una operación de convolución discreta, la cual considera valores en instantes específicos de tiempo que pueden ser denotados con valores discretos, y se adiciona un modelo de ruido independiente del valor de la señal medida. De esta manera se puede explicar la expresión matemática como la convolución entre el objeto que es desconocido y se denota con la letra  $o$ , con la respuesta impulsional  $h$  la cual representa la modelación del sistema óptico, y a lo que se le añade un nivel de ruido para obtener la imagen  $i$ .

### **Tipos de ruido**

El ruido dependiente de la señal está relacionado con la llegada de energía que produce el impacto de fotones, el cual puede ser cuantificado, es decir, que se pueden contar como eventos discretos que se modelan como procesos estocásticos de tiempo continuo o procesos de Poisson, pero debe tenerse en cuenta que la probabilidad de ocurrencia del fenómeno es constante (García & Viteri, 2009). Este tipo de ruido conocido como ruido de disparo se produce cuando el objeto visual es más pequeño, ya que la

imagen se formará por un número finito de fotones, lo que da lugar a fluctuaciones estadísticas. La función de densidad de probabilidad que modela este modelo de ruido es:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad (3)$$

Para la media y varianza iguales a  $\lambda$ , cuanto mayor sea la media, mayor será la desviación estándar observada. Esto se puede observar en fuentes débiles u objetos más pequeños, para los cuales el ruido de disparo será más alto, debido a la menor cantidad de fotones que impactaran sobre la superficie de formación de la imagen. En caso de no tener ninguna fuente o ningún tipo de señal, el ruido de disparo se anula, es decir, que si no hay fuentes observadas la media y la varianza van a ser iguales a 0 (García y Viteri, 2009). Otro aspecto para tener en cuenta es que, si la media es lo suficientemente grande puede aproximarse a una distribución normal, de acuerdo con el Teorema Central del Límite, el cual establece que la distribución de probabilidad de la sumatoria de  $n$  variables aleatorias independientes con media y varianza finita se aproxima a la distribución normal.

El ruido térmico o de lectura, está relacionado directamente con el dispositivo electrónico que se utilice para tomar la imagen, a mayor calor se producirá más movimiento de electrones los cuales afectarán al resultado final, es decir, a la imagen. Este tipo de ruido se modela matemáticamente con una distribución normal debido al Teorema Central del Límite (García & Viteri, 2009):

$$P(X = x) = f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (4)$$

### Métodos de estimación

El filtro inverso es la transformación al dominio de Fourier de  $i$  y  $h$ , dividirlos y finalmente anti transformar la solución de vuelta desde el espacio de Fourier (Rebollo, s.f):

$$\tilde{o}(u, v) = \frac{\tilde{i}(u, v)}{\tilde{h}(u, v)} \xrightarrow{F^{-1}} o(x, y) \quad (5)$$

El Filtro Wiener tiene una estrecha relación con la solución antes descrita y matemáticamente se denota de la siguiente manera:

$$\widehat{o}_W(u, v) = \frac{\tilde{h}^*(u, v)\tilde{i}(u, v)}{|\tilde{h}(u, v)|^2 + \frac{S_n}{S_o(u, v)}} \quad (6)$$

Este filtro es sencillo de utilizar, pero se pueden identificar algunos problemas, ya que en la aplicación siempre se deberá considerar un parámetro de regularización que será calculado a mano. Además, para el caso de  $S_o(u, v) < S_n$ , como se puede saber la distribución de frecuencias del objeto si precisamente eso es lo que se quiere estimar. Si se tienen buenas estimaciones de estos parámetros se podría mejorar la calidad de la solución, pero este filtro genera algunos artefactos que son objetos nuevos dentro de una imagen, y se producen por el cambio abrupto de un píxel a otro, esto tiende a generar ruido y a difuminar la imagen del objeto que se desea estimar (Reyes, Gutiérrez, Hernández, y Calvo, 2018).

El algoritmo de deconvolución de Richardson – Lucy es un método iterativo para obtener la mejor aproximación al objeto visual a partir de los datos, siempre considerando un número de iteraciones que puedan ser procesadas por la capacidad computacional existente y cuyos criterios de detención son: el número de iteraciones, convergencia, tiempo de procesamiento.

Asumiendo un modelo de ruido de Poisson y si se aplican iteraciones de Picard, que es un método para obtener la solución a una ecuación diferencial realizando iteraciones, se tiene la siguiente expresión (Avendaño & González, 2021):

$$\hat{o}^{(n+1)}(x, y) = K \cdot \hat{o}^{(n)}(x, y) \cdot \left[ h^- * \frac{i(x, y)}{(h^+ * \hat{o}^{(n)})(x, y)} \right]^\alpha \quad (7)$$

### Inferencia Bayesiana

Para generalizar los algoritmos descritos se puede considerar el teorema de Bayes el cual permite incluir información a priori sobre la solución para así controlar la amplificación del ruido. Se puede relacionar el objeto y la imagen mediante la siguiente ecuación:

$$P(o|i) = \frac{P(i|o)P(o)}{P(i)} \quad (8)$$

La probabilidad condicional de encontrar el objeto o a partir de la imagen i es igual a la probabilidad condicional de que la imagen i haya sido producida por el objeto o, multiplicado por una probabilidad a priori de o. La solución a la que se desea llegar es la que maximice la probabilidad condicionada, es decir que la probabilidad de encontrar o a partir de i sea máxima (Canals, 2019).

$$\hat{o} = \operatorname{argmax} P(o|i) = \operatorname{argmax} P(i|o)P(o) \quad (9)$$

El objeto  $o$  aparece en ambos lados de la ecuación por lo que se facilita la creación de métodos iterativos, y como la probabilidad de  $i$  puede considerarse igual a 1 teniendo en cuenta que ya se tiene una imagen inicial, quedaría sin efecto. Si se asume  $P(o)=1$ , es decir que no se tiene ningún conocimiento a priori del objeto, entonces se tiene una solución por máxima verosimilitud, y si se considera el término de regularización  $P(o)$  se tendría una solución a posteriori (Canals, 2019).

$$\hat{o}_{ML} = \operatorname{argmax} P(i|o) \quad (10)$$

$$\hat{o}_{MAP} = \operatorname{argmax} P(i|o)P(o) \quad (11)$$

Considerando la solución por máxima verosimilitud para un modelo de ruido blanco gaussiano, usando la PSF, y expresándola como la función de densidad de probabilidad normal se tiene:

$$P(i|o) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{|i-o*h|^2}{2\sigma^2}} \quad (12)$$

La solución que maximiza la ecuación es la misma que minimiza su logaritmo negativo:

$$\hat{o}_{ML} = \operatorname{argmax} P(i|o) = \operatorname{argmin}\{-\log P(i|o)\} \quad (13)$$

$$= \operatorname{argmin}\left\{\frac{1}{2\sigma^2}|i - o * h|^2 + cte\right\}$$

Esta solución es similar a la de mínimos cuadrados salvo por el parámetro  $\frac{1}{2\sigma^2}$ . Para obtener la estimación del objeto se debe derivar la ecuación con respecto del objeto  $o$  e igualar a 0. Aplicando el método de Jacobi se puede obtener una expresión iterativa:

$$\hat{o}^{(n+1)}(x, y) = \hat{o}^{(n)}(x, y) + \gamma \cdot h^- * [i(x, y) - (h^+ * \hat{o}^{(n)})(x, y)]^\alpha \quad (14)$$

Esta expresión es más estable que el algoritmo de Richardson – Lucy, pero también es más lento en la convergencia.

Considerando un modelo de ruido de Poisson, y se utiliza la función de densidad de probabilidad de Poisson, para seguidamente repetir el procedimiento, se llegará a una solución idéntica a la del algoritmo de Richardson – Lucy:

$$P(i|o) = \frac{e^{-(o*h)}(o * h)^i}{i!} \quad (15)$$

### Aplicación de los algoritmos

En el Filtro Wiener supervisado, para escoger el parámetro de regularización  $\lambda$  se buscó un equilibrio



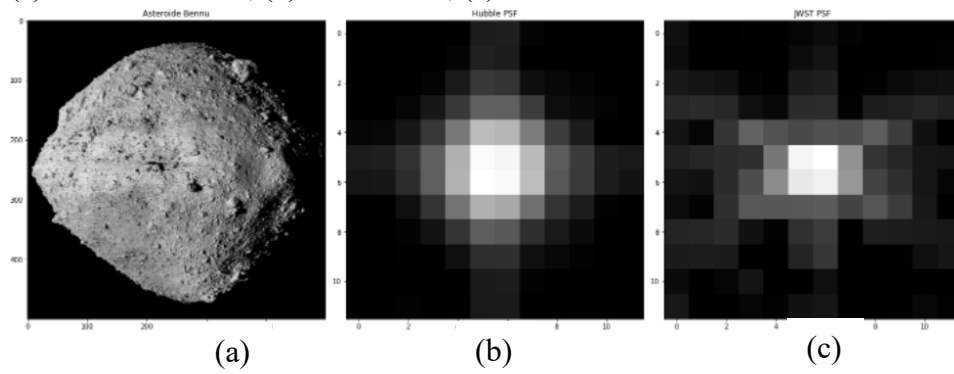
entre la fidelidad de los datos y la estabilidad de la solución, sin que llegue a ser demasiado suavizada y se pierdan detalles de la imagen del asteroide. Se consideró, además, que el valor del MSE obtenido con  $\lambda$  sea menor que el error obtenido con la imagen ruidosa, realizando en cada caso el cálculo del MSE para diferentes valores de  $\lambda$ . La aplicación del Filtro Wiener No supervisado, por el contrario, se realizó de forma automática. Para el algoritmo R-L, al tratarse de un método iterativo, la solución deseada depende del número de iteraciones establecido o del alcance de convergencia en el valor del MSE. El criterio de selección del número de iteraciones, de igual forma, se hizo de acuerdo con el valor del error MSE para cada número de iteraciones del algoritmo, buscando que sea menor que el error MSE con la propia imagen ruidosa. Sin embargo, se probaron algunos valores más altos del número de iteraciones para tratar de mejorar los detalles de la imagen, sin que se amplifique demasiado el ruido en la imagen. Para el algoritmo NLM, se realizó la estimación de la desviación estándar del ruido, sigma, de las imágenes convolucionadas con ruido de Poisson y AWGN, estableciendo el número de parches en los píxeles de 5x5, y el área de búsqueda del algoritmo de 13x13. Se aplicó el algoritmo en los modos lento y rápido, con y sin el uso de la desviación estándar sigma y se calcularon las métricas MSE y PSNR para cada caso.

## **RESULTADOS Y DISCUSIÓN**

Para la convolución y deconvolución se utilizaron los paquetes de Python: astropy, numpy, scipy, skimage, PIL y matplotlib. Se usó como imagen original la del asteroide Bennu de tamaño 500 x 500 en escala de grises y las PSFs modeladas del telescopio Hubble (PSFH) en longitud de onda de 0.5  $\mu\text{m}$  y del James Webb (PSFJ) en 2  $\mu\text{m}$ , de tamaño 12 x 12 (Figura 1) como se indica en Makidon, Casertano, Cox y Van de Marel (2007). Todas las imágenes se cargaron en Python en formato FITS. Se realizó la convolución de la imagen del asteroide con cada PSF para simular la pérdida de resolución espacial. Sobre las imágenes convolucionadas con las dos PSFs (Figura 2), de forma individual se añadió primero, ruido aleatorio de Poisson (Figura 3) basado en las mismas imágenes convolucionadas, y luego ruido AWGN con dos niveles SNR, 0.1 y 0.5 (Figura 4). Se realizó la deconvolución sobre las imágenes convolucionadas con las PSFs y con ruido mediante la aplicación de los Filtros Wiener supervisado y no supervisado, el algoritmo de R-L y el algoritmo de NLM tal como se muestra en los anexos (Figura 5 a 28).

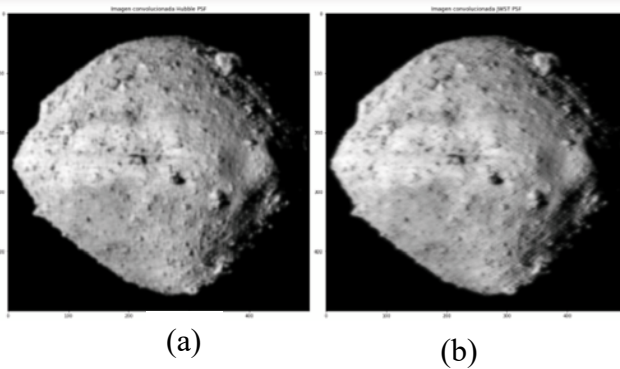
**Figura 1.**

(a) Asteroide Bennu; (b) PSF Hubble; (c) PSF JWST



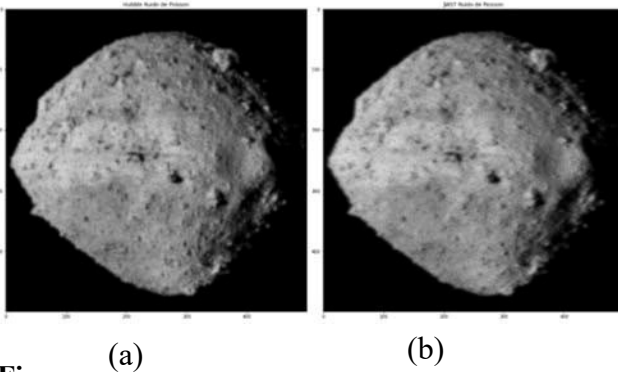
**Figura 1.**

Imágenes convolucionadas con: (a) PSF Hubbel y (b) PSF JWST



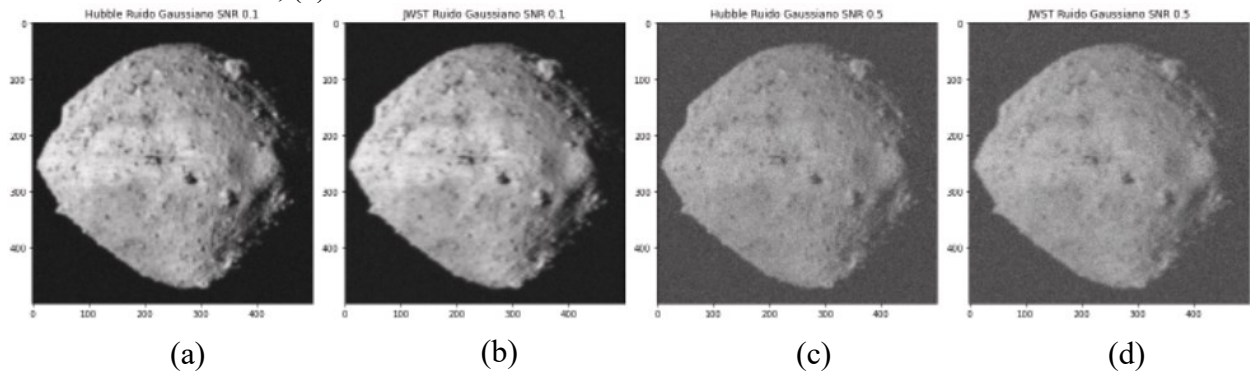
**Figura 2.**

Imágenes convolucionadas con ruido de Poisson: (a) PSF Hubbel y (b) PSF JWST



**Figura**

Imágenes convolucionadas con ruido de AWGN: (a) PSF Hubbel SNR 0.1, (b) PSF JWST SNR0.1, (c) PSF Hubbel SNR 0.5, (d)PSF JWST SNR 0.5



Para el Filtro Wiener supervisado con ruido de Poisson, de los valores MSE para cada  $\lambda$  se observó que con  $\lambda=0$ , se tiene el error MSE más alto, esto estaría indicando la inestabilidad alta de la solución (Filtro inverso). De igual forma, para  $\lambda$ s muy bajos o muy altos el error MSE fue mayor que el error respecto a la imagen ruidosa; esto también se presentó en el caso con ruido AWGN. En el caso con SNR más alto, son evidentes los valores del parámetro de regularización mayores que con SNR más bajos, debido justamente a la mayor cantidad de ruido aleatorio presente en la imagen que produciría cambios más bruscos en la imagen, por lo que un  $\lambda$  mayor reduciría este efecto, pero presentando una imagen más suavizada respecto al caso con SNR más bajo, como se mira comparativamente en las imágenes del Filtro Wiener Supervisado entre la figura 9, 10, 13 y 14 para PSFH, y entre la figura 11, 12, 15 y 16 para PSFJ. Con el algoritmo R-L, para el caso de las imágenes con ruido de Poisson con las dos PSFs, se pudo observar que el MSE empieza con un valor alto en la primera iteración y luego baja hasta un valor mínimo con el incremento del número de iteraciones y a partir de este número, el MSE empezó a subir de manera indefinida. Este valor MSE más bajo, es menor, en ambos casos, que el MSE con la imagen con ruido. De esta manera, se garantizó el criterio propuesto, además de que el ruido no empiece a amplificarse también con la propia señal de la imagen con valores más altos del número de iteraciones. Para el caso de la PSFH, se seleccionó un número de iteraciones de 10 y para el caso de la PSFJ se seleccionó un número de iteraciones de 8. Sin embargo, se observó que, para el caso con la PSFH, con 33 iteraciones se estaba todavía por debajo del error MSE con la imagen ruidosa, por lo que se probó también este valor; y para el caso de la PSFJ con 18 iteraciones. Con las imágenes con ruido AWGN, los MSE más bajos se dieron en la primera iteración, y con 2 o más iteraciones el aumento del error MSE fue tremendo. De esta manera, para los casos de las dos PSFs y para los dos niveles de SNR, se utilizó un número de iteraciones igual a 1, aunque, se probó también con 3 iteraciones para verificar si se producía gran amplificación de ruido con base en los altos valores de MSE. Con la aplicación del algoritmo de NLM, los resultados fueron de menor calidad que con los otros métodos ya que se basa en la interpolación de los valores de los píxeles para reducir el ruido. Los valores de la PSNR para todos los casos se encuentran en el rango aceptable de pérdida de calidad en la imagen reconstruida, entre 21 y 22.55 dB. Sin embargo, las imágenes resultantes son más suavizadas y con menos detalle en todos los casos, especialmente para las imágenes con ruido AWGN.

Para todos los casos, los resultados con el Filtro Wiener supervisado fueron mejores, con valores MSE menores, que los del no supervisado como se muestra en la Tabla 1. Los resultados del Filtro Wiener no supervisado se observan suavizados. Esta diferencia se debe a que el valor de  $\lambda$  escogido se hizo con base en el cálculo del error MSE, mientras que el Filtro Wiener No supervisado realiza un proceso automático de selección sin información a priori de partida, por lo que el error en este caso podría ser mayor, como se dio en los MSE. El valor del parámetro de regularización  $\lambda$  para el caso con ruido AWGN, aumentó mucho con la mayor presencia de ruido. Con el incremento de 5 veces en el SNR, el parámetro de regularización aumentó casi 20 veces en el caso de Hubble, y 35 veces en el caso de JWST. Para el caso del algoritmo de R-L, con ruido de Poisson, los números de iteraciones que dieron MSE mínimos, produjeron imágenes sin amplificación de ruido, pero todavía algo borrosas, por lo que se probó incrementando el número de iteraciones, que, aunque se amplificó un poco el ruido, y en el caso de la PSFJ se tiene un MSE mayor que con la imagen ruidosa, se apreciaron mejor los detalles de la imagen original. En las curvas de la Figura 29 con ruido de Poisson se observa un MSE óptimo (mínimo) en las iteraciones 10 y 8 para cada PSF. Las dos curvas tienen un comportamiento similar. Aunque se debería utilizar el número de iteraciones que producen el MSE más bajo, como se probó, depende de cómo se vea la imagen resultante, y se podría incrementar el número de iteraciones a usar, para mejorar los detalles en la imagen reconstruida. Para el algoritmo R-L con ruido AWGN como se observa en la Figura 30, el MSE se da ya en la primera iteración y a partir de 2 iteraciones el incremento del error MSE fue tremendo, debido a que el algoritmo de R-L es óptimo para imágenes con ruido de Poisson. Se probó, por ejemplo, con 3 iteraciones la gran amplificación de ruido en la imagen. El comportamiento de las curvas con AWGN es similar en todos los casos, manteniéndose en valores altos de error (considerar la escala de la gráfica en el eje MSE). Solo en el caso de la imagen con la PSFJ y el SNR bajo 0.1 se tiene un pico extremadamente alto en la iteración 6.

**Tabla 1**

Errores MSE para cada PSF, por tipo de ruido, nivel SNR y algoritmo utilizado. Caso de PSFs correctas e incorrectas.

<b>Poisson</b>						
<b>PSF</b>	<b>Wiener Supervisado</b>	<b>Wiener no Supervisado</b>	<b>Richardson Lucy it 1</b>	<b>Richardson Lucy it 2</b>	<b>Non local means (mayor PSNR)</b>	<b>MSE / PSNR con imagen con ruido</b>
<b>PSF Hubble</b>	392.35	398.10	336.80	354.37	22.36	404.25/22.06
<b>PSF JWST</b>	401.92	417.13	372.04	540.95	22.07	425.85/21.81
<b>AWGN SNR 0.1</b>						
<b>PSF Hubble</b>	386.57	388.92	438.34	9891.17	22.55	380.55/22.33
<b>PSF JWST</b>	394.67	403.69	469.87	6242.06	22.27	402.36/22.10
<b>AWGN SNR 0.5</b>						
<b>PSF Hubble</b>	455.36	487.48	460.08	279870.08	21.68	1245.34/17.18
<b>PSF JWST</b>	468.93	503.85	487.85	17771072.29	21.47	1253.10/17.14

**Tabla 2**

Filtro Wiener supervisado. Valores del parámetro de regularización  $\lambda$  que dio el error MSE más bajo para cada PSF, por tipo de ruido.

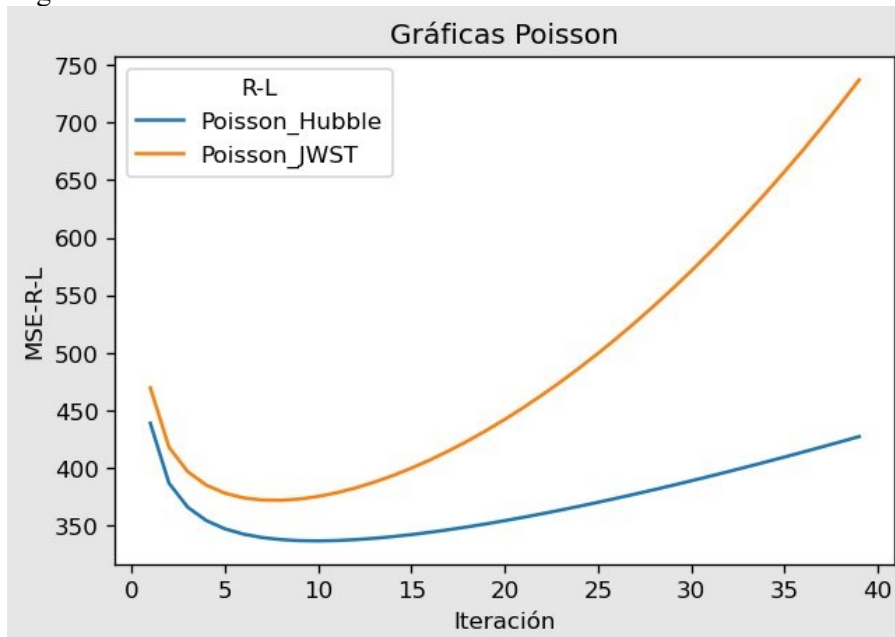
	<b>AWGN SNR 0.1</b>	<b>AWGN SNR 0.5</b>	<b>Poisson</b>
<b>PSF Hubble</b>	0.15	3	0.5
<b>PSF JWST</b>	0.1	3.5	0.15

**Tabla 3**

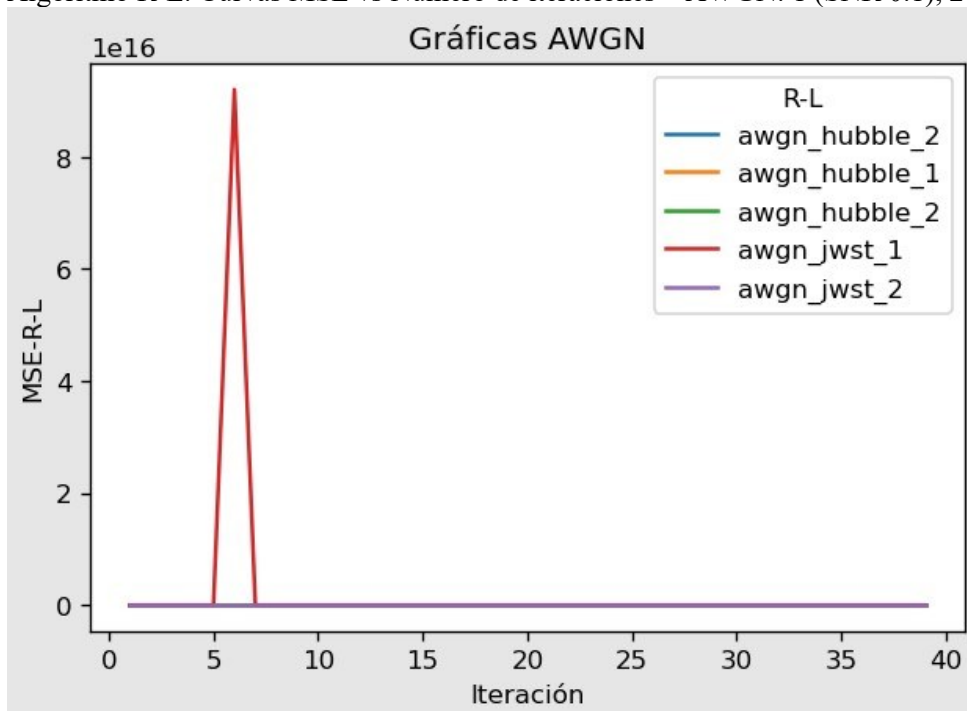
Algoritmo de Richardson Lucy. Número de iteraciones usado por tipo de ruido para cada PSF con el MSE más bajo y con un MSE alternativo que mostró una reconstrucción de la imagen con mayor detalle (Poisson), y con mayor amplificación de ruido (AWGN)

<b>Poisson</b>		
	<b>Richardson Lucy (# iteraciones con MSE más bajo)</b>	<b>Richardson Lucy (# iteraciones alternativo)</b>
PSF Hubble	10	20
PSF JWST	8	28
<b>AWGN SNR 0.1</b>		
PSF Hubble	1	3
PSF JWST	1	3
<b>AWGN SNR 0.5</b>		
PSF Hubble	1	3
PSF JWST	1	3

**Figura 4.**  
Algoritmo R-L. Curvas MSE vs Número de iteraciones – Poisson



**Figura 5.**  
Algoritmo R-L. Curvas MSE vs Número de iteraciones – AWGN: 1 (SNR 0.1), 2 (SNR 0.5)



## CONCLUSIONES

De acuerdo con la calidad de reconstrucción y a los menores MSE, para las imágenes con ruido de Poisson, los resultados fueron mejores con el algoritmo R-L, mientras que para ruido AWGN fueron mejores con el Filtro Wiener Supervisado, esto debido al tipo de ruido que asume cada algoritmo. El Filtro Wiener Supervisado presentó mejores resultados que el no supervisado, mostrando MSE menores en todos los casos.

En el caso de ruido AWGN con SNR alto (0.5) el algoritmo R-L fue mejor que el Filtro Wiener No supervisado. Esto indicaría que a mayores niveles de SNR AWGN el algoritmo R-L funciona mejor que el Filtro Wiener No supervisado.

Los mejores resultados del algoritmo NLM fueron con el modo rápido, pero con menos calidad que el Filtro Wiener y el algoritmo R-L, y, aunque se logra una mejora en las imágenes y la PSNR está dentro del rango aceptable de calidad, comparando los valores PSNR de cada caso con la PSNR obtenida con la imagen ruidosa de la Tabla 1, se observa que la diferencia es menor a 0.5 dB, lo que no representa el convenio de mejora aceptable en un algoritmo de reconstrucción. El NLM rápido con sigma provista produjo un mejor resultado (PSNR más altos y MSE más bajos) en las imágenes con ruido de Poisson y en las imágenes con ruido AWGN con mayor SNR. En las imágenes con ruido AWGN con SNR bajo el resultado es apenas mejor con el algoritmo rápido sin sigma provista.

## REFERENCIAS

- Avendaño, A., & González, E. (2021). *Restauración de imágenes faciales contaminadas con degradación lineal y ruido gaussiano con base en técnicas de filtrado de wiener y el algoritmo no lineal de Lucy - Richardson*. Cuenca.
- Bo, L., Junrui, L., Xuegang, L., Huajun, W., & Sen, W. (2019). A novel and fast nonlocal means denoising algorithm using a structure tensor. *The journal of Supercomputing*, 770-782. [https://doi.org/10.1007/s11227-018-2611-3]
- Canals, M. (2019). Bases científicas del razonamiento clínico: inferencia Bayesiana. *Revista médica de Chile*. [https://dx.doi.org/10.4067/s0034-98872019000200231]

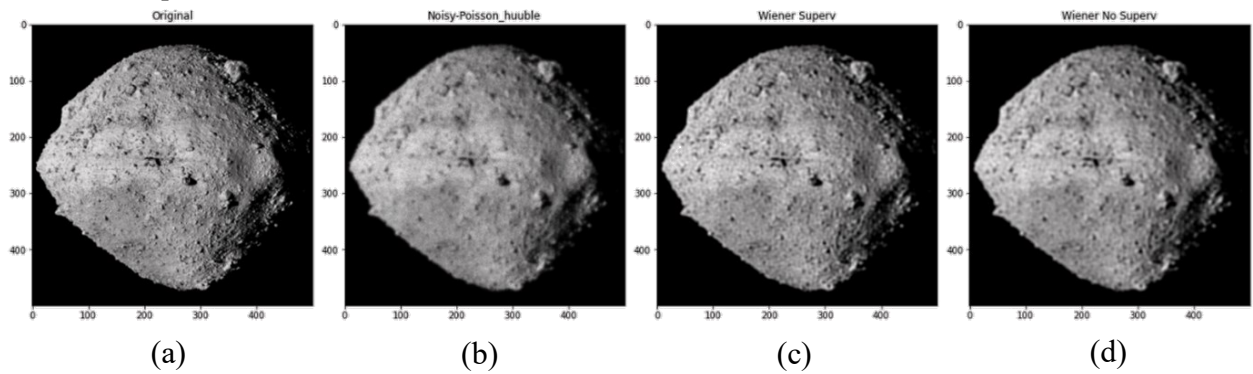
- García, C., & Viteri, J. (2009). *Análisis e implementación de algoritmos para distorsionar imágenes con distintos tipos de ruido y aplicación de filtros en dos dimensiones para restaurarlas*. Guayaquil.
- Garvanova, M., & Ivanov, V. (2021). Quality assessment of image deburring algorithms. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 1-5. [DOI 10.1088/1757-899X/1031/1/012051]
- Makidon, R., Casertano, S., Cox, C., & Van de Marel, R. (2007). *The JWST Point Spread Function: Calculation Methods and Expected Properties*. NASA.
- Rebollo, R. (s.f). *Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, Universidad Nacional de la Plata, Argentina*. Obtenido de Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, Universidad Nacional de la Plata, Argentina: <http://carina.fcaglp.unlp.edu.ar/senales/teorias/Clase09.pdf>
- Reyes, F., Gutiérrez, A., Hernández, G., & Calvo, J. (2018). Filtrado Wiener para la reducción de ruido en la verificación de locutores. *Revista Cubana de Ciencias Informáticas*.
- Sara, U., Akter, M., & Uddin, M. (2019). Image Quality Assessment through FSIM, SSIM, MSE and PSNR—A Comparative Study. *Journal of Computer and Communications*, 8-18. [DOI:10.4236/JCC.2019.73002]
- Shorman, S., & Pitchay, S. (2015). Comparison Image Restoration Methods between Wiener Filter and Richardson Lucy Using SSIM. *FST\_USIM*. USIM.
- team, s.-i. d. (s.f). *scikit-image*. Obtenido de scikit-image: [https://xn--scikitimage-qf3f.org/docs/stable/auto\\_examples/filters/plot\\_nonlocal\\_means.html#sphx%E2%80%90glr%E2%80%90auto%E2%80%90examples%E2%80%90filters%E2%80%90plot%E2%80%90nonlocal%E2%80%90means%E2%80%90py](https://xn--scikitimage-qf3f.org/docs/stable/auto_examples/filters/plot_nonlocal_means.html#sphx%E2%80%90glr%E2%80%90auto%E2%80%90examples%E2%80%90filters%E2%80%90plot%E2%80%90nonlocal%E2%80%90means%E2%80%90py)
- Wang, M., Zhou, S., & Yan, W. (2018). Blurred image restoration using knife-edge function and optimal window Wiener filtering. *PLoS One*. [DOI: 10.1371/journal.pone.0191833]



## ANEXOS

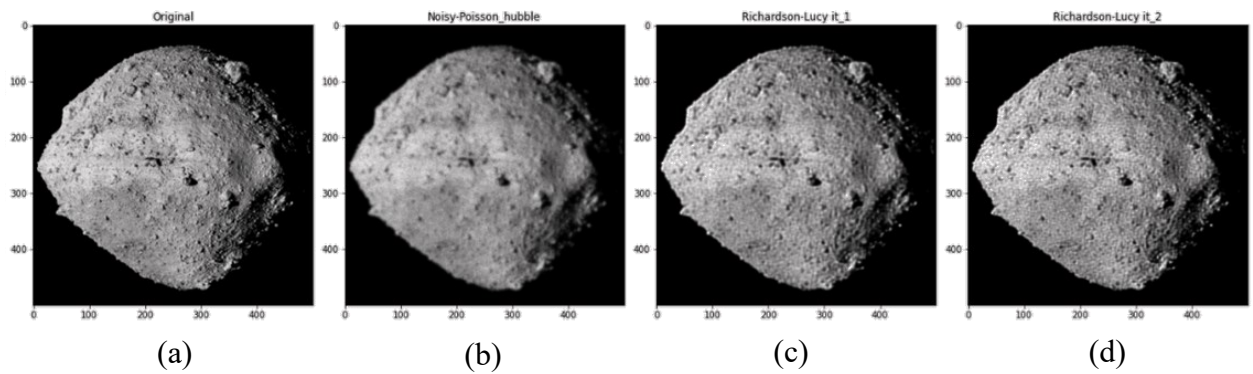
**Figura 6.**

Comparación imágenes: (a) original, (b) PSF Hubble – Poisson, (c) filtro Wiener supervisado y (d) filtro Wiener no supervisado



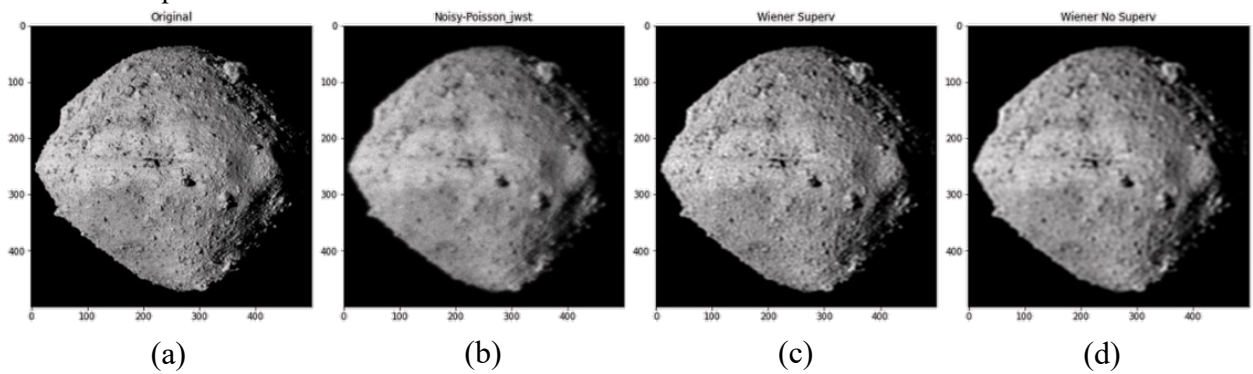
**Figura 7.**

Comparación imágenes: (a) original, (b) PSF Hubble – Poisson, (c) Richardson – Lucy it 1 y Richardson – Lucy it 2



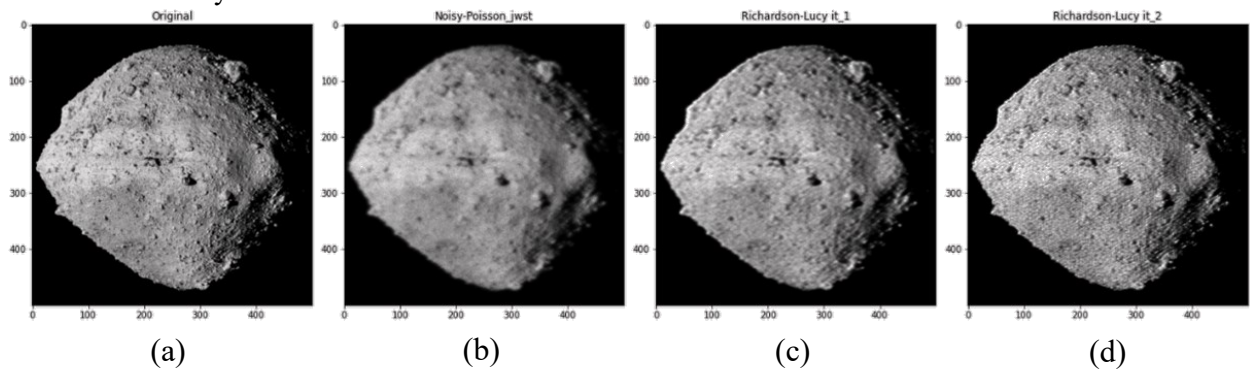
**Figura 8.**

Comparación imágenes: (a) original, (b) PSF JWST – Poisson, (c) filtro Wiener supervisado y (d) filtro Wiener no supervisado



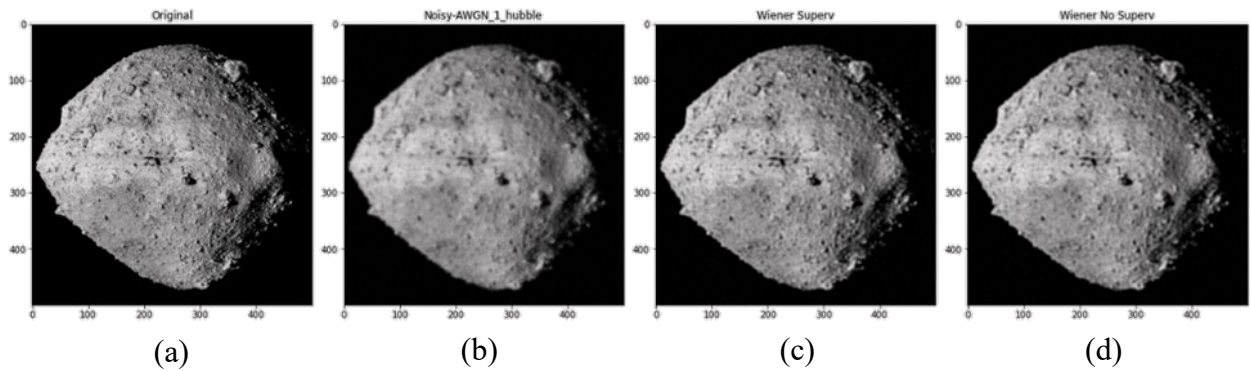
**Figura 9.**

Comparación imágenes: (a) original, (b) PSF JWST – Poisson, (c) Richardson – Lucy it 1 y (d) Richardson – Lucy it 2



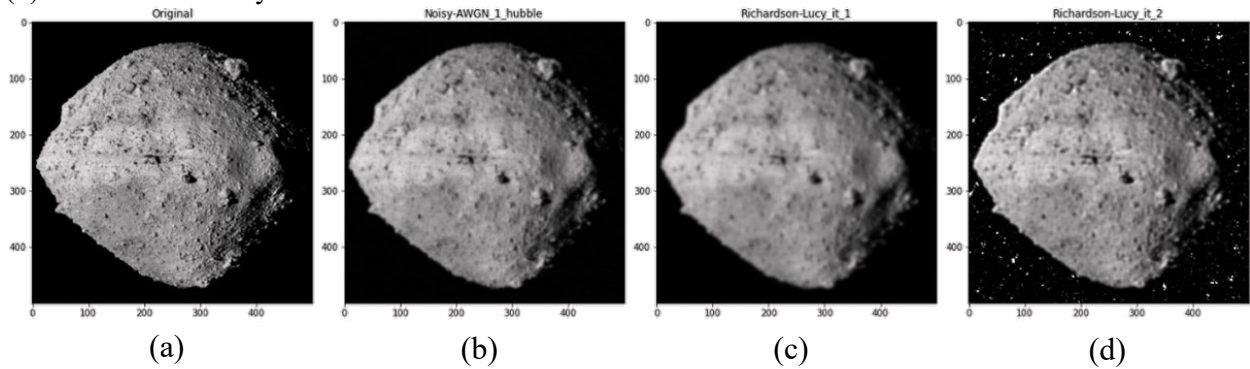
**Figura 10.**

Comparación imágenes: (a) original, (b) PSF Hubble – AWGN SNR 0.1, (c) filtro Wiener supervisado y (d) filtro Wiener no supervisado



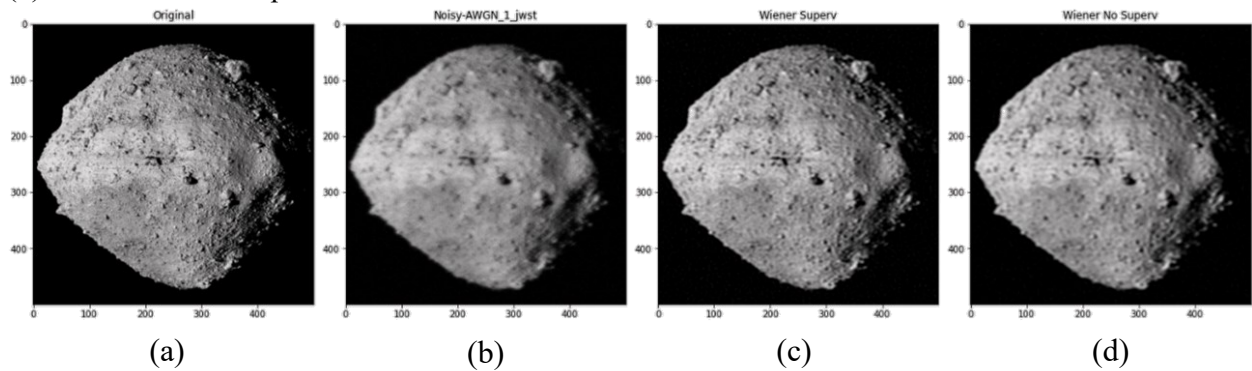
**Figura 11.**

Comparación imágenes: (a) original, (b) PSF Hubble – AWGN SNR0.1, (c) Richardson – Lucy it 1 y (d) Richardson – Lucy it 3



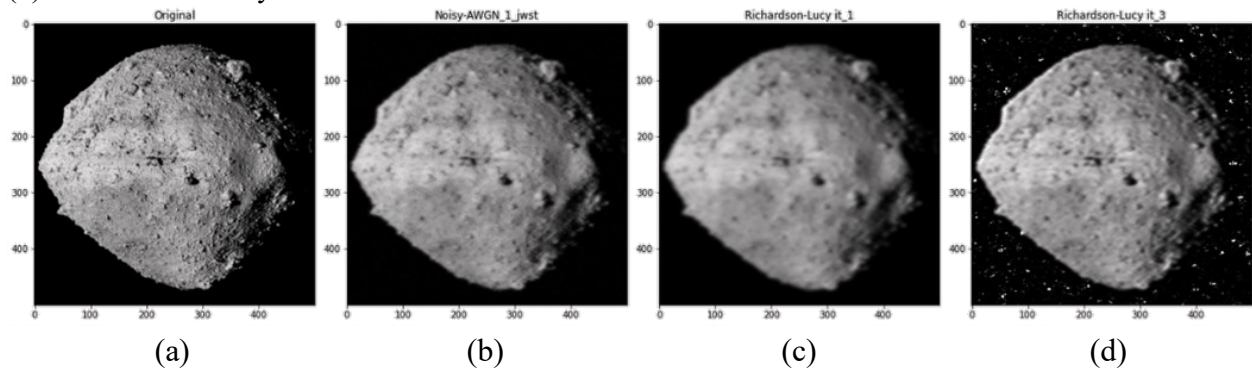
**Figura 12.**

Comparación imágenes: (a) original, (b) PSF JWST – AWGN SNR0.1, (c) filtro Wiener supervisado y (d) filtro Wiener no supervisado



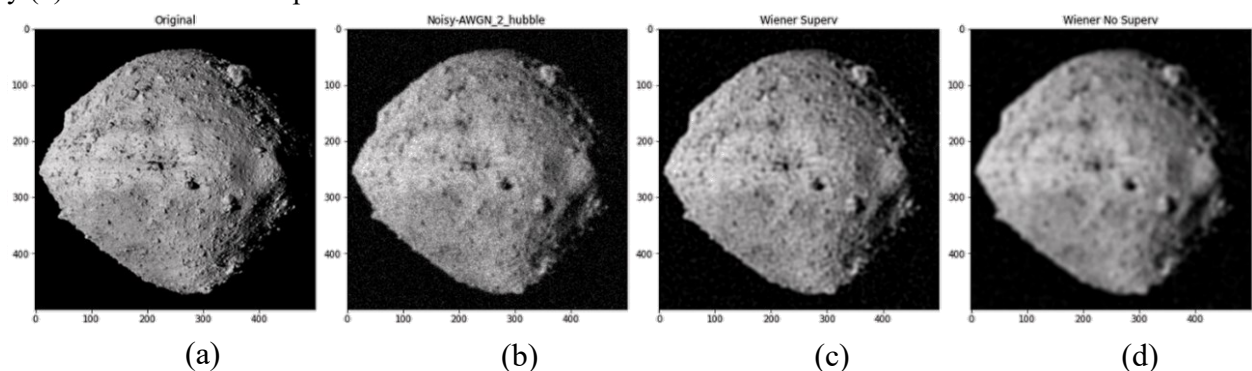
**Figura 13.**

Comparación imágenes: (a) original, (b) PSF JWST – AWGN SNR 0.1, (c) Richardson – Lucy it 1 y (d) Richardson – Lucy it 3



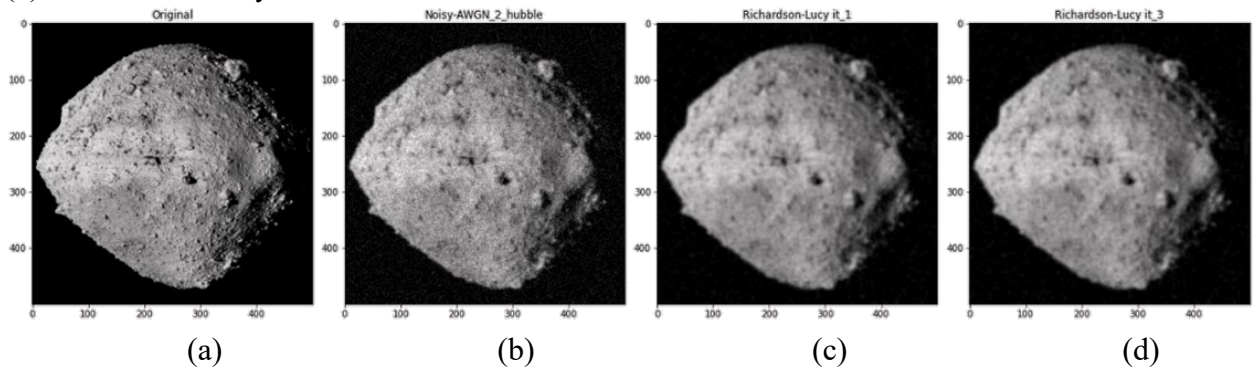
**Figura 14.**

Comparación imágenes: (a) original, (b) PSF Hubble – AWGN SNR 0.5, (c) filtro Wiener supervisado y (d) filtro Wiener no supervisado



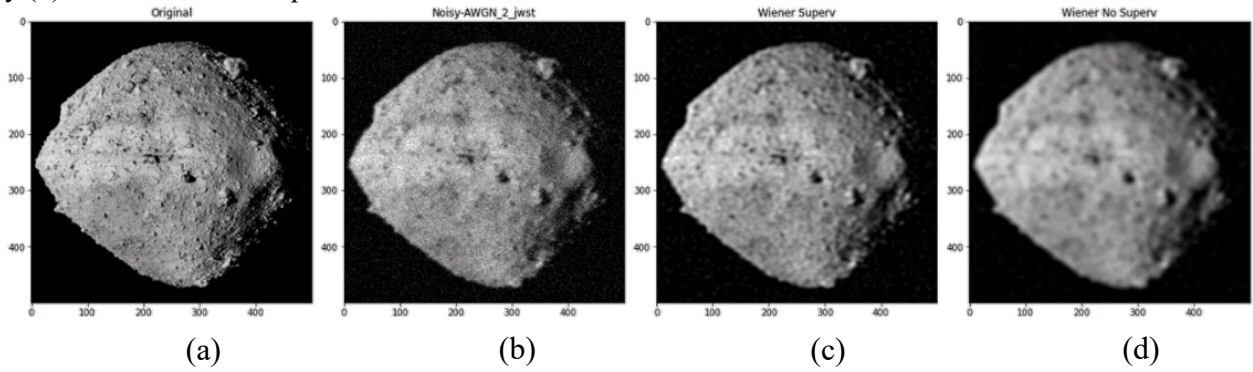
**Figura 15.**

Comparación imágenes: (a) original, (b) PSF Hubble – AWGN SNR 0.5, (c) Richardson – Lucy it 1 y (d) Richardson – Lucy it 3



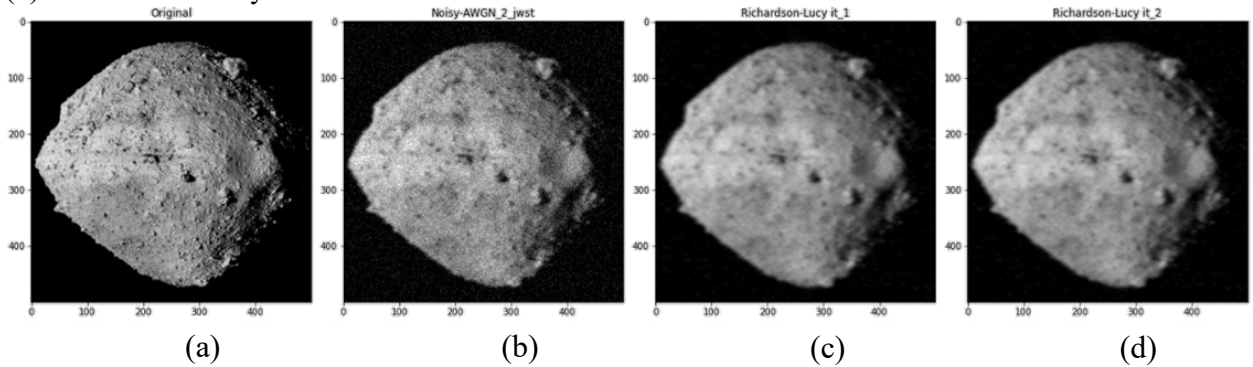
**Figura 16.**

Comparación imágenes: (a) original, (b) PSF JWST – AWGN SNR 0.5, (c) filtro Wiener supervisado y (d) filtro Wiener no supervisado



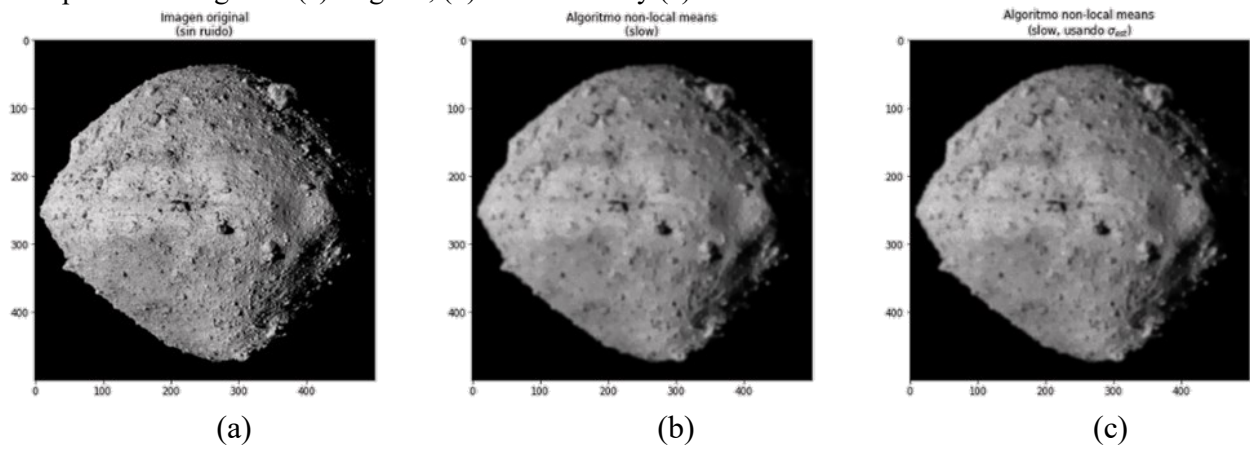
**Figura 17.**

Comparación imágenes: (a) original, (b) PSF JWST – AWGN SNR 0.5, (c) Richardson - Lucy it 1 y (d) Richardson - Lucy it 2



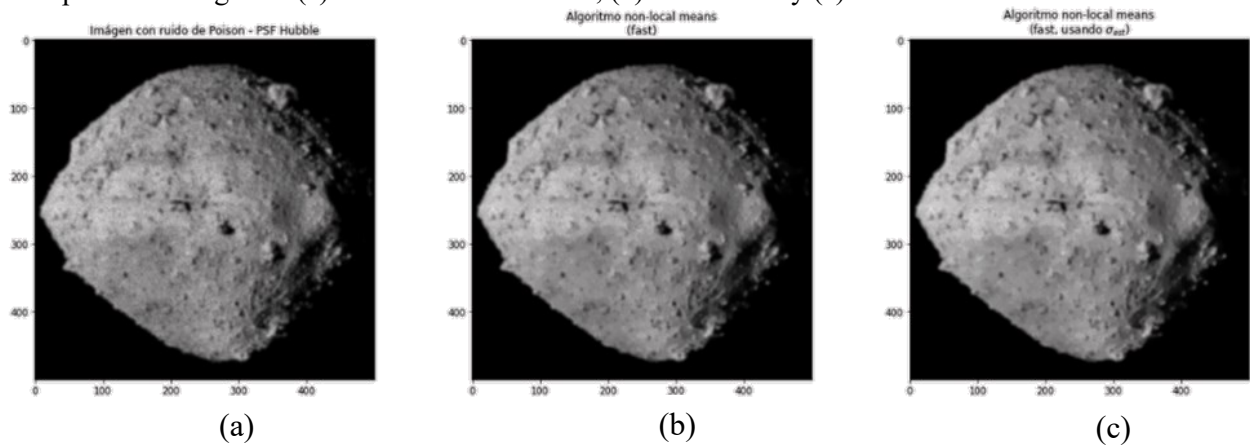
**Figura 18.**

Comparación imágenes: (a) original, (b) NLM - slow y (c) NLM - slow  $\sigma$  est



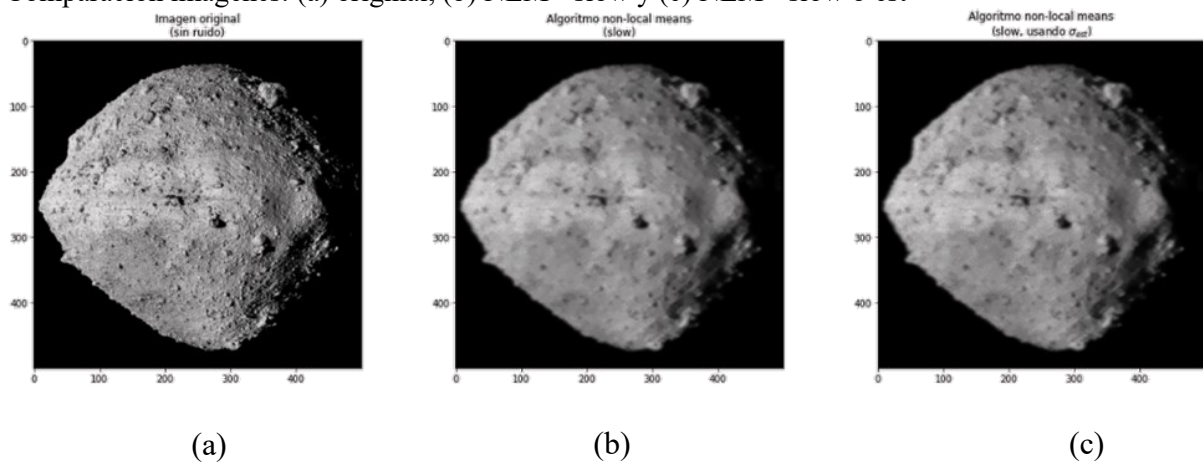
**Figura 19.**

Comparación imágenes: (a) PSF Hubble - Poisson, (b) NLM - fast y (c) NLM - fast  $\sigma$  est



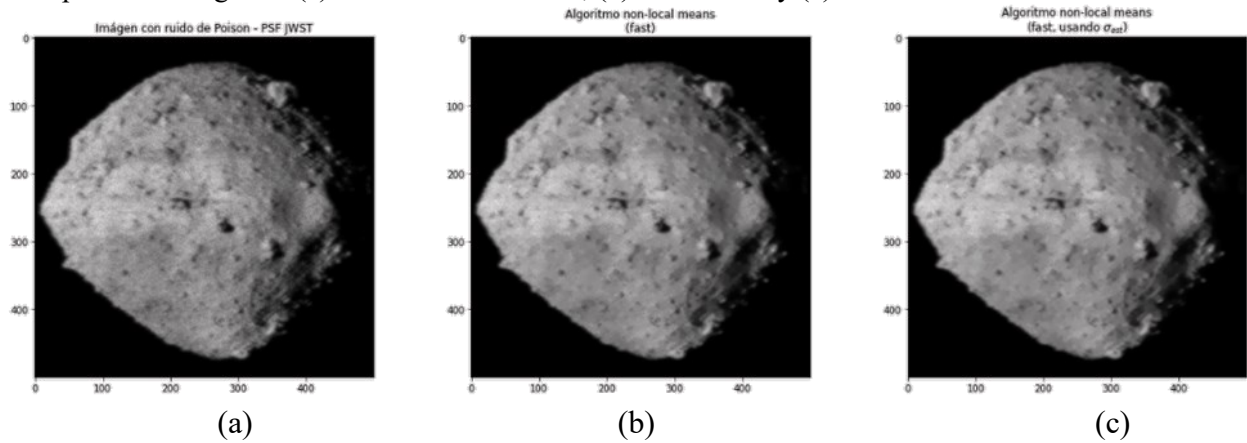
**Figura 20.**

Comparación imágenes: (a) original, (b) NLM - slow y (c) NLM - slow  $\sigma$  est



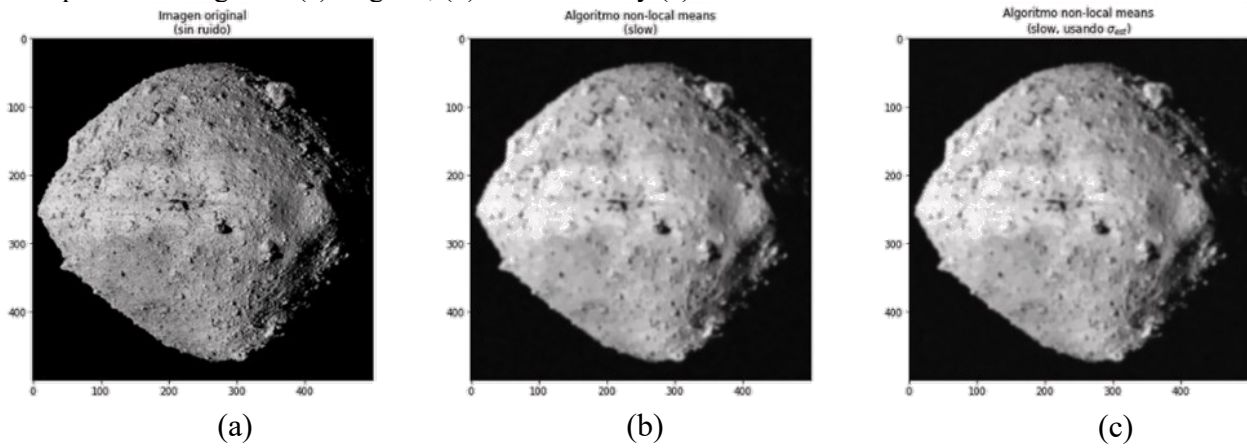
**Figura 21.**

Comparación imágenes: (a) PSF JWST - Poisson, (b) NLM - fast y (c) NLM - fast  $\sigma$  est



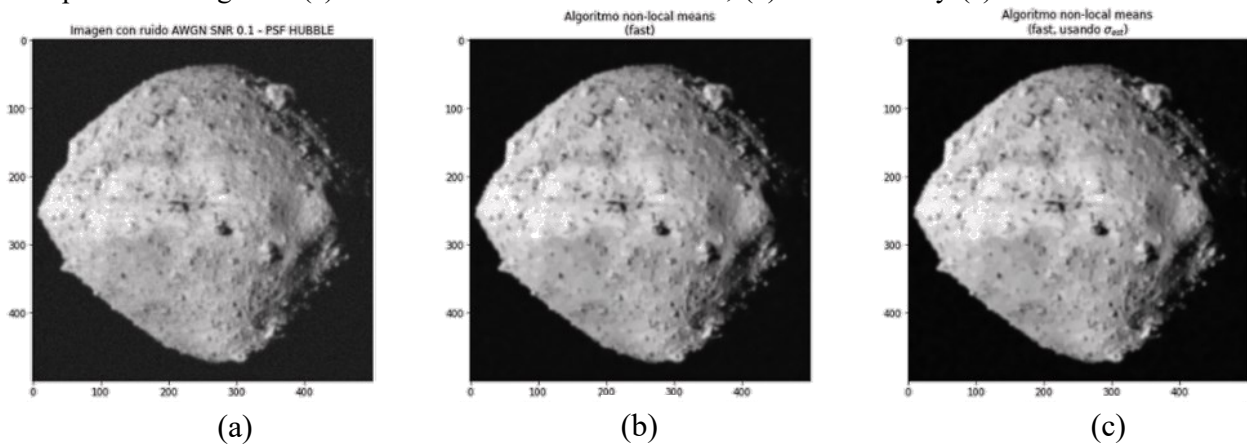
**Figura 22.**

Comparación imágenes: (a) original, (b) NLM - slow y (c) NLM - slow  $\sigma$  est



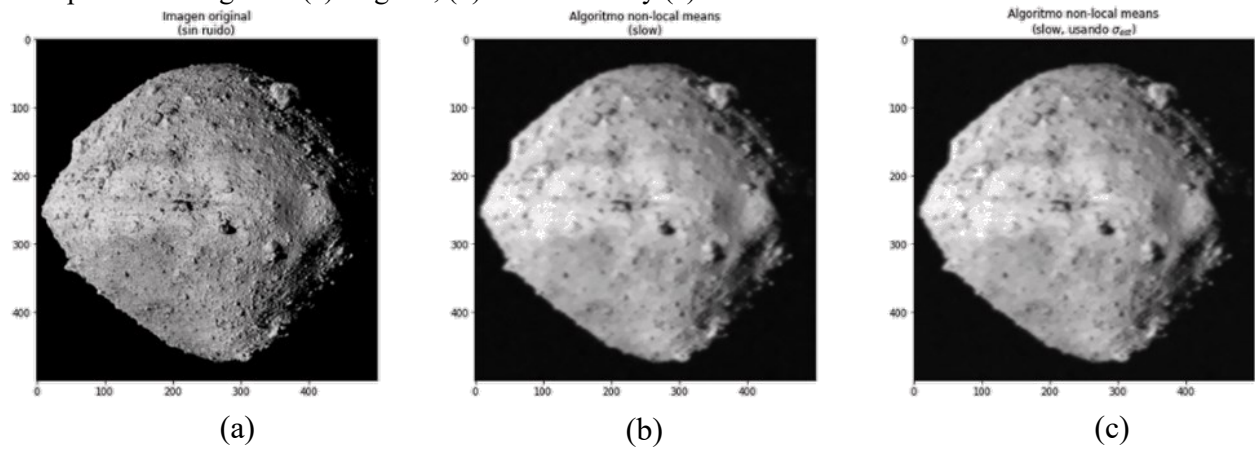
**Figura 23.**

Comparación imágenes: (a) PSF Hubble - AWGN SNR 0.1, (b) NLM - fast y (c) NLM - fast  $\sigma$  est



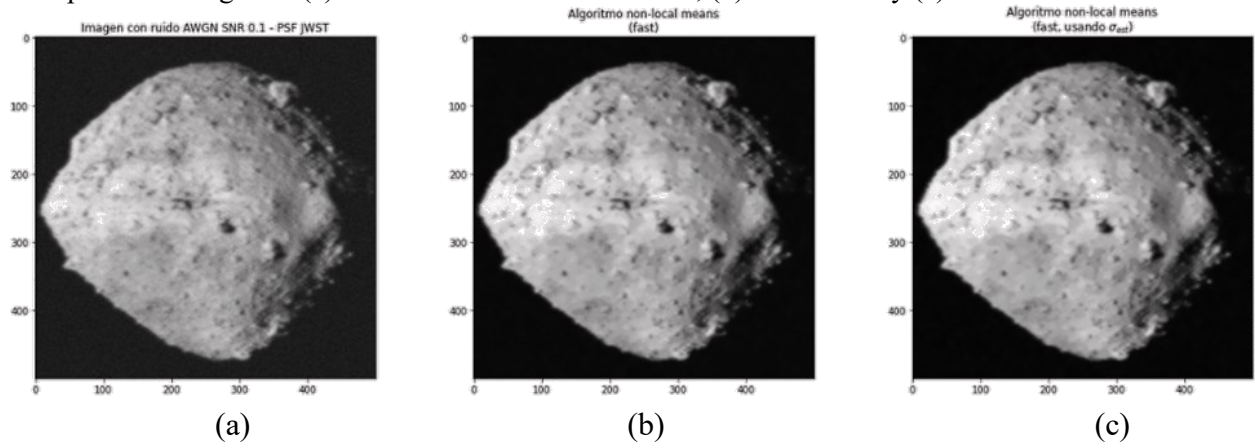
**Figura 24.**

Comparación imágenes: (a) original, (b) NLM - slow y (c) NLM - slow  $\sigma$  est



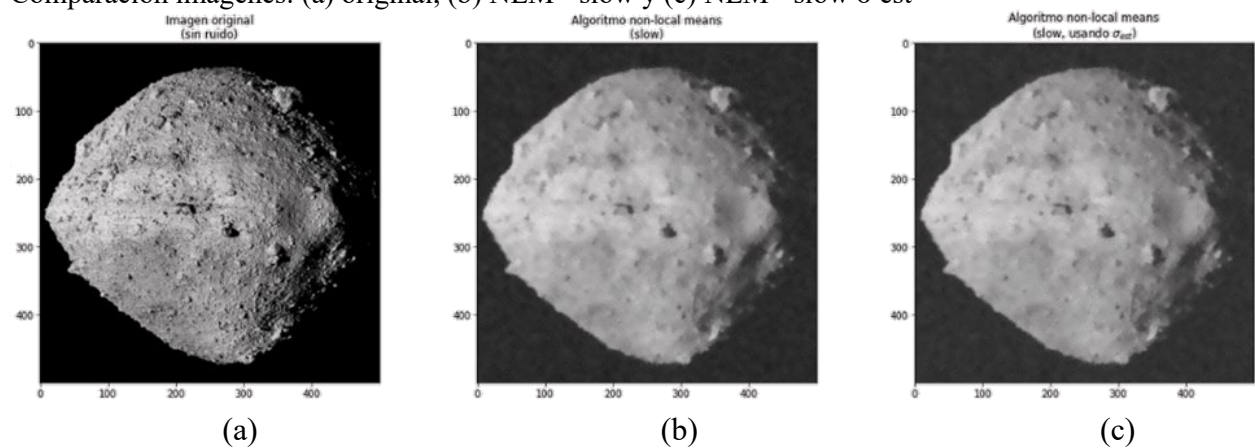
**Figura 25.**

Comparación imágenes: (a) PSF JWST - AWGN SNR 0.1, (b) NLM - fast y (c) NLM - fast  $\sigma$  est



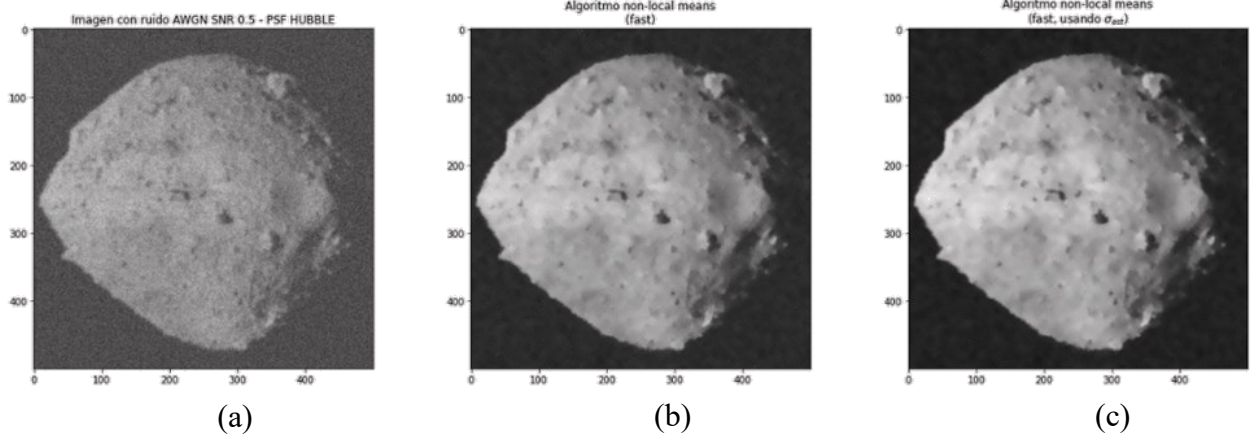
**Figura 26.**

Comparación imágenes: (a) original, (b) NLM - slow y (c) NLM - slow  $\sigma$  est



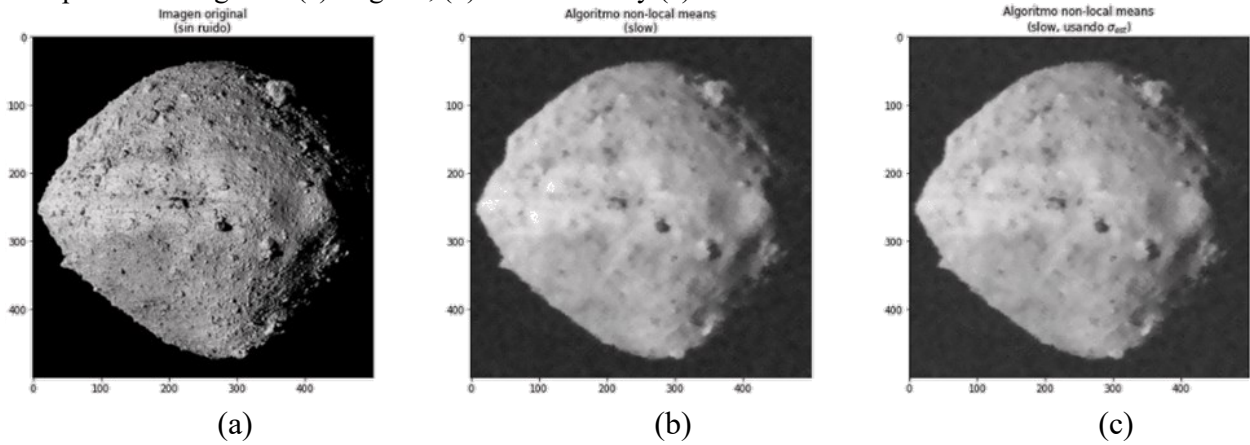
**Figura 27.**

Comparación imágenes: (a) PSF Hubble - AWGN SNR 0.5, (b) NLM - fast y (c) NLM - fast  $\sigma$  est



**Figura 28.**

Comparación imágenes: (a) original, (b) NLM - slow y (c) NLM - slow  $\sigma$  est



**Figura 29.**

Comparación imágenes: (a) PSF JWST - AWGN SNR 0.5, (b) NLM - fast y (c) NLM - fast  $\sigma$  est

