

Proporcionalidad y Linealidad desde el Concepto de Función Lineal una Mirada desde el Enfoque Semiótico de Raymond Duval y Bruno D'amore

Ingrý Carina Coy Chacón¹

ingrycoy@umecit.edu.pa

<https://orcid.org/0000-0002-9661-1281>

Universidad Metropolitana de Educación
Ciencia y Tecnología UMECIT
Panamá

Ligia Ines García Castro

ligiaines.garcia@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0003-4437-0225>

Universidad Metropolitana de Educación
Ciencia y Tecnología UMECIT
Panamá

RESUMEN

Análisis desde el Enfoque Semiótico y la Teoría de Registros de Representaciones Semiótica TRRS de Raymon Duval y Bruno D'Amore, explora la relación de las categorías de proporcionalidad y linealidad en el contexto de objetos virtuales de aprendizaje incorporados en la herramienta web Matelengua para el objeto matemático de la función lineal. Se desarrolla de forma explícita la relación entre las magnitudes que presenta a partir del comportamiento proporcional y por ende de forma implícita la construcción de un modelo organizativo del pensamiento matemático creado cuando se trabajan con ejercicios de tabulación y graficación de la función lineal. Investigación de tipo cualitativo con métodos de la teoría fundada desde una intervención en el aula, con actividades realizadas en el contexto habitual de los estudiantes y desarrolladas en el trabajo de diferentes tipos de situaciones problema por seis estudiantes de grado noveno de educación básica, entre los 14 y 16 años de edad pertenecientes a una institución educativa pública ubicada en el municipio de Soacha-Cundinamarca-Colombia. Los resultados sugieren que los objetos virtuales aplicados para la función lineal que integran estos principios teóricos mejoran significativamente la comprensión de la proporcionalidad y linealidad en el aprendizaje y enseñanza para los estudiantes en matemáticas.

Palabras clave: proporcionalidad; linealidad; función lineal; semiótica; representaciones semióticas

¹ Autor principal.

Correspondencia: ingrycoy@umecit.edu.pa

Proportionality and Linearity from the Concept of Linear Function, a Look from the Semiotic Approach of Raymond Duval and Bruno D'amore

ABSTRACT

Analysis from the Semiotic Approach and the Theory of Registers of Representations Semiotic TRRS by Raymon Duval and Bruno D'Amore, explores the relationship of the categories of proportionality and linearity in the context of virtual learning objects incorporated in the Matelengua web tool for the object linear function mathematician. The relationship between the magnitudes presented is explicitly developed based on proportional behavior and therefore implicitly the construction of an organizational model of mathematical thinking created when working with tabulation and graphing exercises of the linear function. Qualitative research with grounded theory methods from a classroom intervention, with activities carried out in the students' usual context and developed in the work of different types of problem situations by six ninth grade students of basic education, among them 14 and 16 years old belonging to a public educational institution located in the municipality of Soacha-Cundinamarca-Colombia. The results suggest that virtual objects applied to the linear function that integrate these theoretical principles significantly improve the understanding of proportionality and linearity in learning and teaching for students in mathematics.

Keywords: proportionality; linearity; lineal function; semiotics; semiotic representations

*Artículo recibido 20 septiembre 2023
Aceptado para publicación: 28 octubre 2023*

INTRODUCCIÓN

En el manejo de situaciones desde las categorías de proporcionalidad y linealidad desde el objeto matemático función lineal en el aula de clase, se trabajan ejercicios y problemas contextualizados en torno a determinar por parte de los estudiantes la situación de proporcionalidad o no, así como la construcción de tablas de datos y de gráficas de la función lineal. Todo este proceso implica la enseñanza de teorías, teoremas, conceptos y fórmulas que permiten la conceptualización de la función lineal. En este sentido los estudiantes realizan los ejercicios que indica el docente y con ellos ejecutar a partir de la orientación de OVA los registros de representación semiótica tabular y gráfico de la función lineal.

La matemática siempre ha presentado mayor dificultad en la comprensión de los estudiantes, su dificultad y poca motivación es un hecho que se evidencia en la falta de participación y cuestionamiento, situación que se atribuye a muchas causas, como la clasificación de las funciones didácticas atribuidas al proceso de enseñanza aprendizaje, según Muñoz (2013) la que se manifiesta desde el campo de investigación de la Semiótica en la Didáctica de la Matemática. Corresponde según D'Amore (2004) a la conceptualización de la matemática, que no son conceptos sino objetos matemáticos y que, al pensar en un objeto, no existe como tal un objeto sino una representación de éste, tanto para el profesor como para el estudiante lo que se presenta es una de las varias representaciones de un objeto, sea como un esquema numérico, gráfico, icónico, textual, entre otros que permite la aprehensión matemática de los objetos.

Uno de los objetos matemáticos que presenta gran diversidad de registros semióticos y de representaciones semióticas es el de Función Lineal (FL), los escenarios algebraicos, numéricos, gráficos, icónicos y geométricos no son claros en los diferentes tratamientos y conversiones para los estudiantes.

Por ello se pretende con el presente estudio vincular desde la actuación de sus realidades, un contexto asociado a los intereses y motivaciones de los estudiantes, pensando desde el sentir y desde su interacción diaria y prácticamente innata, La Tecnología.

Los procesos de enseñanza y aprendizaje a partir de la Didáctica y la Semiótica en Matemática y de un profundo análisis por desarrollar procesos de pensamiento matemático mediante el uso de las herramientas tecnológicas, el objetivo de este trabajo está orientado a analizar ejercicios de proporcionalidad y linealidad

desde el concepto de la función lineal, en donde se enmarcan diferentes tipos de situaciones problema del contexto habitual para los estudiantes de grado noveno, determinar de forma explícita la relación entre las magnitudes, y de forma implícita la construcción de un modelo organizativo del pensamiento matemático creado cuando se trabajan con ejercicios de tabulación y graficación de la función lineal enmarcada en la Teoría de Raymon Duval y Bruno D'Amore.

Alcanzar el conocimiento y aprendizaje de un concepto matemático, con el fin de transformar las actividades y la forma en cómo permitimos que el estudiante interactúe con la matemática, para enriquecer las herramientas didácticas que llevamos al aula y para permitir personas críticas y conscientes de su aprendizaje.

El proyecto de investigación que permitió el presente artículo, fue desarrollado con estudiantes de grado noveno de la institución educativa San Mateo de carácter público ubicada en el municipio de Soacha Cundinamarca (Colombia). Desde la intervención y aplicación de los diferentes OVA del objeto matemático función lineal, mediante la utilización de una Herramienta Web llamada Matelengua, trabajo de investigación desarrollado en la I.E. San Mateo Soacha desde el año 2015, con estudiantes de diferentes grados de básica secundaria y media, a partir del diseño, implementación y aplicación de una práctica innovadora.

La Herramienta Web Matelengua (2015), tiene la intención de presentar diversos Objetos Virtuales de Aprendizaje: vídeos, presentaciones, juegos, talleres, guías, ofreciendo oportunidades de mejora en el proceso de enseñanza y aprendizaje para los estudiantes, con el uso de la Herramienta Web Matelengua, se fortalecen las Competencias Matemáticas y Digitales, indispensables para lograr un avance adecuado en la Didáctica de la Matemática.

La experiencia y las investigaciones demuestran que la educación debe ser contextualizada, buscar las herramientas que permitan incorporar a los estudiantes de forma efectiva, dinámica, sólida y motivadora es un objetivo claro, así como las estrategias pedagógicas que evidencian la verdadera aprehensión de los objetos matemáticos, los cambios en los estudiantes llevan hacia la realidad de sus necesidades y hacia nuevos retos y desafíos en educación, por ello incorporar la semiótica en la didáctica de la matemática con

un objeto virtual de aprendizaje como propuesta para evidenciar la mejor comprensión de las Funciones Lineales.

De acuerdo con D'Amore (2012) la naturaleza de los conceptos ha tenido en la historia miradas filosóficas, psicológicas, antropológicas y atribuye ahora una mirada pragmática. Los conceptos desde el punto de vista filosófico y en la mirada de Aristóteles se describen como un procedimiento que permite la descripción, clasificación y previsión de los objetos conocibles. Según D'Amore (2012) un concepto es dinámico al ser considerado un proceso, da una mirada de inacabado, filosóficamente lleva a las épocas medievales de los siglos XVII y XIX, en donde se elabora el concepto para objetos concretos, abstractos, irreales, inexistentes o imaginarios.

Desde una mirada psicológica Vigotsky (1962) atribuye la formación de conceptos a una relación social que permite en las personas concebir diferencias psíquicas y atañe también diferencias en la construcción de dicho concepto desde la infancia, en especial conceptos científicos. Bruner (1964) atribuye al concepto una mirada desde la representación de los objetos, más precisamente de los objetos matemáticos en ejecutiva, icónica y simbólica.

D'Amore (2012) precisa sobre dos aspectos: la naturaleza del concepto y la función del concepto. En este sentido desde el punto de vista filosófico, se atribuye al concepto una relación con su esencia, las cosas no pueden ser otra cosa, más que los que son, por otro lado, atribuye al signo del objeto en su significado. Pecharromán (2014) sobre los objetos matemáticos enuncia que representan dos funciones una organizativa y otra interpretativa del contexto, afirma que la creación del objeto se presenta cuando se determina su representación (expresión y uso) y significado (interpretación), desde su funcionalidad.

Dentro de las representaciones en educación matemática y de acuerdo con Rico (2009), el concepto de representación se relaciona con una señal externa que permite dilucidar un concepto matemático, como signo o marca usados en el pensamiento matemático e incluso como esquemas o imágenes mentales para dar ideas matemáticas, al respecto concepto similares se presentan “símbolos (Skemp, 1980), sistema matemático de signos (Kieran y Filloy, 1989), sistemas de notación (Hancock, Kaput & Goldsmith, 1992), sistema de registros semióticos (Duval, 1993).

En términos de Rico (2009) las representaciones matemáticas se entienden como todas aquellas herramientas (signos y gráficos) que permiten entender los conceptos y procedimientos matemáticos, en el trabajo de Radford (1998) se encuentra de sumo interés en la didáctica de la matemática. Diferentes investigaciones muestran el interés por abordar la conceptualización de representaciones matemáticas a través de la historia, pero sin duda el trabajo de las representaciones y la comprensión matemática desde la semiótica y noética de Duval (1995/1999) ha mantenido un fuerte interés por la comunidad científica.

La Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval (1999) aborda los problemas de aprendizaje, la relación existente entre las representaciones semióticas para algunas funciones cognitivas y el uso de las representaciones mentales, hace veraz la hipótesis de que no hay noesis sin semiosis, involucrando permanentemente el papel que juega la necesidad de los registros semióticos a determinar que es la semiosis la que determina las condiciones de la noesis.

En el aprendizaje intelectual fundamental de los objetos representados según Duval (1999) se debe tener en cuenta los análisis y condiciones de la semiosis, los tratamientos y las conversiones en los diferentes sistemas semióticos, no hacerlo constituye una confusión entre el objeto representado y la representación, no logra identificar dos representaciones de un mismo objeto.

En el ámbito del razonamiento, la comprensión de textos y la adquisición de tratamientos lógicos y matemáticos, en el proceso de desarrollo del pensamiento y de los obstáculos para el aprendizaje, se presentan fenómenos como la diversificación de los registros de representación semiótica, reconocer las diferencias entre la lengua natural y la lengua simbólica, la gran diversidad de representaciones semióticas, que no son claras para los estudiantes incluso para los docentes, los tratamientos y conversiones que se presentan ya que, no pueden dejarse en un mismo registro y la falta de coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica que llevan según Duval (1993) a la no congruencia, ejemplo de ello registros como son las gráficas, tablas, plano cartesiano, entre otros.

Sin embargo en el uso de los sistemas de representación semiótica se hace en diferentes representaciones semióticas de un mismo objeto, sin ser conscientes de esa realidad, provocando según Duval (1999) un encapsulamiento en el aprendizaje de las matemáticas, puesto que el paso entre los diferentes sistemas

semióticos debe hacerse con congruencia, es decir que exista de forma inicial correspondencia semántica entre las unidades significantes, igual orden de aprehensión entre las unidades en las dos representaciones y convertir una unidad significativa en la representación de partida en una sola unidad significativa en la representación de llegada. Aduce que en la medida en que se tenga en cuenta la congruencia aumenta la cantidad de respuestas y tareas efectivas por parte de los estudiantes.

En las actividades, tareas y diferentes formas de enseñar no se hace distinción entre los tratamientos y las conversiones, se hace de forma común y es preciso reconocer en el acto estas dos actividades, los tratamientos juegan como un tratamiento dentro del mismo registro semiótico, utiliza las reglas de funcionamiento mientras que las conversiones son tratamientos en las que se pasan de un registro a otro. Situación que afianza según Duval (1995) el estrecho vínculo entre semiosis y noética. Con respecto a esto Duval (1999) sostiene que al separar las actividades de conversión y de tratamiento, se puede observar las dificultades y el encapsulamiento de los registros en los estudiantes.

La idea de conceptualización del objeto matemático en Duval (2006) la presenta bajo la trilogía concepto-construcción-significado, considera que el concepto permanece en constante construcción, ya que no es posible delimitarlo, dado que esta construcción emerge hacia el significado de forma abundante.

Dentro de los registros de representación del OM función lineal se trabajaron a lo largo de la investigación registros en lengua natural, registros algebraicos, cartesianos, tabular, gráfico y pictórico, para el presente artículo se toman en cuenta los registros tabular y gráfico, aunque de forma implícita los estudiantes trabajan un registro aritmético, estos se desarrollaron mediante los OVA presentados en la Herramienta Matelengua y se relacionan a continuación.

METODOLOGÍA

El presente trabajo se constituye bajo la teoría fundada, dado que el análisis del enfoque noético-semiótico y la relación con OVA permite la construcción de nuevos conocimientos y teorías, aspectos intencionales de la investigación.

Durante su uso se analizan las observaciones sobre los resultados obtenidos en las construcciones del objeto matemático y se compara con la teoría sobre el objeto matemático Función Lineal, teniendo en cuenta que

las investigaciones realizadas por Duval (1999) y D'Amore (2004) no se han realizado mediante el uso de un objeto virtual de aprendizaje, se buscan nuevos hallazgos y conocer de sus propias voces la construcción del objeto matemático, observar en el proceso de investigación las transformaciones y conversiones del objeto matemático a partir de OVA.

Dentro del enfoque cualitativo se pretende ahondar en el método de comparación constante, buscando la saturación de la información, ya que se le atribuye de acuerdo con Galeano (2013) la generación de teoría por el alcance comparativo analítico que ostenta y que permite obtener un alcance comprensivo dentro de esta investigación. Las técnicas e instrumentos de análisis cualitativo que serán aplicados para la recolección de la información y el análisis de los datos que se derivan de la implementación de la herramienta Matelengua para el aprendizaje del OM Función Lineal y la aplicación de los OVA desde el enfoque noético-semiótico.

Teniendo en cuenta que se utilizan matrices de revisión, entrevistas didácticas de pregunta abierta y gamificación, como técnicas cualitativas de recolección de información, en todos los casos se realiza el análisis de la información desde una mirada inductiva, buscando comparar patrones, identificar conceptos que no estén en las categorías y que puedan aportar información relevante para el presente estudio.

Para cumplir con los objetivos específicos se divide en tres fases, cada una organiza el procedimiento a efectuar para realizar el análisis pertinente, en cada una se aplica los momentos de la investigación cualitativa según Glaser y Strauss (1967).

El trabajo de investigación se desarrolla en la I.E. San Mateo Soacha, con estudiantes de grado noveno, de edades entre los 14 y 16 años, para esta investigación se trabaja con seis estudiantes de grado noveno que cumplen con la caracterización referenciada.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Reconocimiento del objeto matemático Función Lineal a partir de las representaciones y transformaciones semióticas realizadas por los estudiantes mediante el uso de Matelengua.

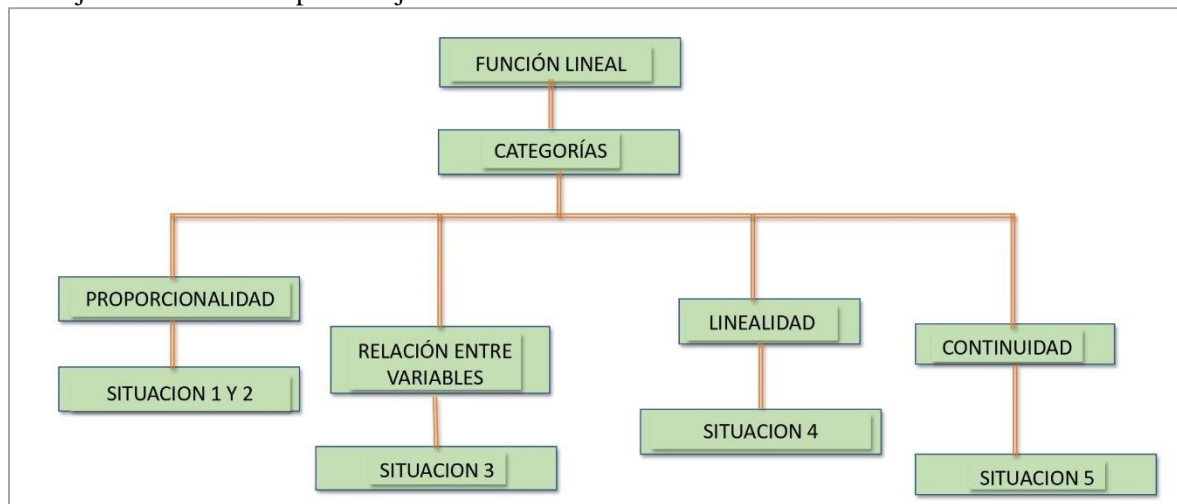
En el reconocimiento del objeto matemático Función Lineal a partir de las representaciones y transformaciones semióticas mediante el uso de Matelengua, se realiza el análisis semiótico del

pensamiento matemático, en este análisis semiótico se consideraron para cada representación semiótica el uso de los OVA dentro del aula en el proceso de aprendizaje, para identificar y comprender conceptualizaciones, aprendizajes, experiencias, significados, entre otros, sobre el objeto matemático Función Lineal desde la perspectiva noético-semiótica y mediante el uso de la herramienta Matelengua.

Este instrumento dentro de la investigación cualitativa se usa para realizar contrastes y comparaciones, para construir conocimiento sobre una base inductiva, en la que según Sandoval (2002, citando a Glaser y Strauss, 1967, p. 102) determinan el proceso en cuatro etapas, la “comparación de incidentes a cada categoría, integración de categorías y propiedades, delimitación de la teoría y escritura de la teoría”, para finalmente construir los aportes teóricos y conocimiento sobre el enfoque noético-semiótico y el uso objetos virtuales de aprendizaje mediante uso de herramienta Matelengua.

Dentro del proceso analítico (integración de categorías y sus propiedades) se reconocieron cuatro categorías (Figura 1) al interior de la construcción del objeto matemático función lineal. Estas categorías se presentan a continuación.

Figura 1: Categorías determinadas para el objeto matemático función lineal a partir del análisis realizado en los procesos de tratamiento y conversión en las diferentes situaciones dadas a los estudiantes mediante los objetos virtuales de aprendizaje.



Para el presente artículo se desarrollan las categorías de proporcionalidad y linealidad enmarcadas dentro del trabajo de la función lineal.

La categoría proporcionalidad se analizó desde el estudio realizado por Martínez y González (2008), cuando establece una relación entre dos magnitudes planteadas dentro de una razón y una proporción, en los estudiantes se evidencia en el trabajo realizado cuando de manera reiterativa escriben textualmente “se crean las razones y luego la proporción”, es así como se enmarca una tendencia a definir cuáles son las magnitudes que deben trabajar y sitúan una debajo de la otra para luego realizar los tratamiento en el registro tabular (establecen columnas y filas), y hacen el pasaje al registro aritmético (operacionalizando con los datos).

De acuerdo con Lammon (2007) los estudiantes construyen un razonamiento proporcional cuando argumentan la relación existente entre las magnitudes de los ejercicios trabajados en el aula, y escriben textualmente “las gallinas se triplicaron al igual que las ovejas”. Así mismo afirma la existencia de un razonamiento proporcional cuando el estudiante crea la habilidad de diferenciar la relación multiplicativa entre las cantidades dentro del contexto presentado.

En los ejercicios trabajados los estudiantes enmarcan la relación de proporcionalidad a partir de la división.

Es decir

A = magnitud gallinas B = magnitud ovejas

Para A tiene por cantidad de magnitud a_1 y a_2

valor 34 y valor 102 respectivamente

B tiene por cantidad de magnitud b_1 y b_2

valor 25 y valor 75 respectivamente

Si bien los estudiantes realizan operacionalización dentro del tratamiento en el registro semiótico aritmético usando expresiones como

$$\frac{34}{102} = 0,33 \text{ y } \frac{25}{75} = 0,33$$

para determinar la proporcionalidad directa existente entre las magnitudes dadas.

Definición de proporcionalidad de acuerdo con Obando, et al, 2009, al establecer que

$$(a_1, b_1) \rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \rho = R(a_1, b_1)$$

Siendo p una cantidad numérica asociada como constante de proporcionalidad.

En este sentido y según estudios de Sánchez (2012) se designa la razón como la relación entre magnitudes y la proporción como la relación de equivalencia entre dos razones, aspecto que los estudiantes enmarcaron dentro de sus tratamientos.

Aunque en el ejercicio de aprendizaje los estudiantes reconocen de forma implícita las representaciones semióticas, no utilizan esta denominación cuando se refieren a ellas a medida que realizan problemas y ejercicios se evidencia la construcción conceptual. Teniendo en cuenta la gran extensión de información recogida, no es posible describirla en el documento, seleccionando las imágenes que ofrecieran mayor información y que permitieran mejor comprensión de lo que los estudiantes construyen en cada ejercicio de la función lineal.

De acuerdo con Obando (2015) el estudio de las Razones, Proporciones y Proporcionalidad (RPP) ha tenido gran estudio no sólo desde el aprendizaje sino desde puntos de vista epistemológicos, didácticos y cognitivos en los que enmarca el impacto en los contextos educativos que ante las diferentes pruebas de estado y estandarizadas sigue teniendo resultados insatisfactorios y prevalece el estudio y preocupación por reconocer nuevos macros comprensivos en el problema de enseñanza y aprendizaje.

Es por ello que en esta investigación se observa minuciosamente el desarrollo paso a paso de los estudiantes en este tipo de ejercicios. Obando (2015) marca la construcción desde procesos cognitivos de Piaget (1958) en donde se reconoce secuencias de enseñanza (para el caso los estudiantes repiten y escriben construcciones) hasta la búsqueda de procesos asociados realizados por varios autores en la década de los 80, entre ellos referencia a Karplus, Pulos & Stege (1983), Tourniaire (1986) entre otros. Dentro de los que se describen estudios sobre proporcionalidad y se reconocen acciones como procesos de pensamiento en relación de dos variables, (construcción por filas y columnas reconocimiento de magnitudes) en cuanto al razonamiento proporcional enmarca acumulaciones coordinadas (reconocimiento de los valores), valores unitarios (fracciones homogéneas) y comparación de razones (determinan de acuerdo al valor hallado si la relación de proporcionalidad es directa o inversa)

Obando (2015) presenta como después de los 90, se enmarca una profunda investigación en torno a la

didáctica de las RPP en las que se determinan aspectos cognitivos y de contexto más desde lo epistemológico, que desarrollan procesos hacia la comprensión de los procesos de aprendizaje, marcando estrechas relaciones entre la multiplicación, la división y las magnitudes (aquí se reconoce que los estudiantes en los procesos de identificar la proporcionalidad o no, desarrollan divisiones entre los valores numéricos dados para las magnitudes)

Desde Obando, Vasco y Arboleda (2014), Obando (2015), Puig y Fernández (2002), Gómez (2007), Sánchez (2012) se reconocen trabajos alrededor de la comprensión de la razón como función entre dos magnitudes y marca la proporcionalidad vista como característica propia de la linealidad desde aspectos escalares y funcionales.

De acuerdo con Obando, Vasco y Arboleda (2014) y Obando (2015) de la comprensión proporcional como habilidad para realizar y utilizar conceptos netamente proporcionales a aspectos cognitivos y metacognitivos de proporcionalidad directa, en los que los estudiantes son analizados y operacionalizados para definir el razonamiento por analogía; en los que el niño es capaz de identificar regularidades en las variaciones entre variables, llegando a generalizar patrones e identificar en donde se presenta dicha estructura. Solucionan problemas rutinarios de proporcionalidad; lo que permite que el estudiante desarrolle un conjunto de habilidades en los que realizan situaciones típicas de la cuarta proporcional y conciencia metacognitiva de la linealidad en la que enuncia la capacidad del niño para analizar procesos de variación entre variables y determinar modelos de proporción directa o no.

La categoría linealidad se presenta a partir de la situación 4, los estudiantes realizan la construcción de la gráfica. Este concepto pasa por concepciones de Euclides, con la definición de recta, Arquímedes, Descartes, con la incorporación geométrica desde la concepción de los lugares geométricos, se constituye el concepto de punto en el plano cartesiano a partir de la composición de dos coordenadas que definen la posición en el plano, dadas por x y y , se propone la recta que pasa por el origen definida como $bx = a$ y la ecuación de la recta en su forma general como, $ax + by = c$. Es así como la recta adquiere representaciones analítico-geométricas.

En los trabajos de los estudiantes se marca la linealidad, desde esa mirada analítica-geométrica en la construcción de las tablas de datos, realizando los tratamientos en los que se reemplazan valores numéricos dentro de las expresiones $f(x) = ax + b$ siendo x y y las variables dependiendo e independiente, que adquieren valores para formar las parejas ordenadas de cada punto que adquiere una posición en un plano cartesiano y que se ubican en una tabla.

Desde Obando, Vasco y Arboleda (2014), Obando (2015), Fernández & Puig (2002), Gómez (2007), Sánchez (2012), Modestou y Gagatsis (2010) se enmarca la linealidad, reconocen trabajos alrededor de la comprensión de la razón como función entre dos magnitudes marcando la proporcionalidad como característica propia de la linealidad desde aspectos escalares (análisis de relaciones entre la misma magnitud, para reconocer un factor escalar (λ) y funcionales (para cualquier par de valores $a_1, f(a_1)$ se tiene que $f(a_1) = \lambda a_1$, siendo λ un factor de proporcionalidad) . Desde la metacognición como una conciencia cognitiva de la linealidad, los estudiantes son capaces de analizar procesos de variación entre variables y determinan modelaciones de proporcionalidad directa. Diferentes trabajos (De Bock et al. (2007), De Bock, Verschaffel, & Janssens (2002), Fernández & Llinares (2012), Fernández, Llinares, Dooren, De Bock, & Verschaffel (2010), Fernández, Llinares, Van Dooren, De Bock, & Verschaffel (2011), Van Dooren & De Bock (2008), Van Dooren et al. (2005), Van Dooren et al. (2004) con enfoques epistemológicos y didácticos permiten afirmar la necesidad de presentar problemas implícitos de linealidad y no linealidad, permitiendo desarrollar conceptos para describir, interpretar, predecir y explicar situaciones de este tipo. Según Obando, Vasco y Arboleda (2014) afirman que el razonamiento proporcional se entiende inicialmente como una relación entre variables y la linealidad no viene desde un concepto propio para los estudiantes, sino que se presenta como un modelo de representación desde el pensamiento matemático como una forma de organización del pensamiento.

Entre las concepciones de linealidad y función, se citan dos definiciones que se identifican en los trabajos de los estudiantes 1 (Figura 2) y 6 (Figura 3), los estudiantes ubican los puntos en el plano cartesiano, una vez realizan la tabla de datos que obtienen de reemplazar los valores numéricos de x en la función $f(x) = 0,5x - 8$.


Figura 2: Estudiante 6, concepción de linealidad y función de la función lineal. El estudiante ubica los puntos en el plano cartesiano, una vez realiza la tabla de datos que obtiene de reemplazar los valores numéricos de x en la función $f(x) = 0,5x - 8$

OVA: TALLER Y VIDEO TABULACIÓN

Análisis del pensamiento semiótico matemático

Semiosis interpretativa

Gráfica de una Función Lineal



Debes colocar tabla de Valores y Gráfica en cada uno de los siguientes ejercicios.

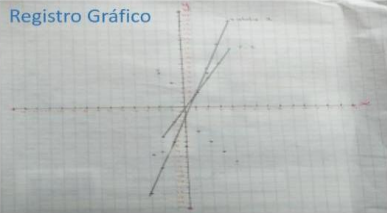
- $Y=5x-2$
- $Y=-2x+3$
- $Y=3x$
- $Y=0,5x-8$

Semiosis expresiva

Registro Tabular

X	f(x)	$Y=0,5(-5)-8$	$Y=0,5(-2)-8$
-5	-7,5	$= -2,5 - 8$	$= -2,0 - 8$
-2	-9	$Y = -9,5$	$Y = -9$
0	-8	$Y = 0,5(0) - 8$	$Y = 0,5(2) - 8$
2	-7	$= 1,0 - 8$	$= 1,0 - 8$
4	-6	$Y = 2,0 - 8$	$Y = 2,0 - 8$

Registro Gráfico



“...hay puntos mal ubicados, creo que me quedan mal los cálculos...no los cálculos están bien...son los puntos...”

“...tengo un valor mal en la ecuación, salieron dos rectas, pero estoy cometiendo error en los puntos, al colocarlos...”

Semiosis interpretativa

ESTUDIANTE 6

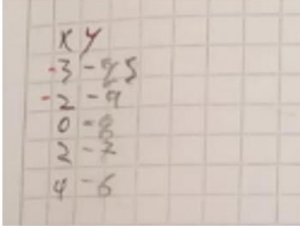
Figura 3: Estudiante 1, concepción de linealidad y función de la función lineal. El estudiante ubica los puntos en el plano cartesiano, una vez realiza la tabla de datos que obtiene de reemplazar los valores numéricos de x en la función $f(x) = 0,5x - 8$

OVA: TALLER Y VIDEO TABULACIÓN

Análisis del pensamiento semiótico matemático

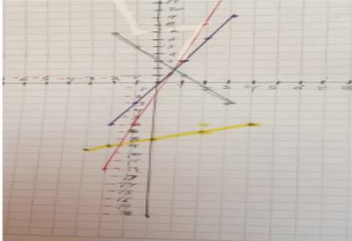
Semiosis interpretativa

Registro Tabular



Semiosis expresiva

Registro Gráfico



Semiosis interpretativa → **Semiosis expresiva** → **Semiosis interpretativa**

“No coloco las líneas de la tabla, pero yo entiendo que se coloca por filas y columnas”

“a cada pareja de la tabla la ubico en el plano y luego uno los puntos”

“esa es una función lineal con pendiente positiva, porque se inclina hacia la derecha”

ESTUDIANTE 1

Allendoerfer y Oakley (1970), plantean que una “una función f es un conjunto de pares ordenados (x, y) siendo

(1) x un elemento del conjunto X

(2) y un elemento del conjunto Y

(3) de modo que no hay dos pares con el mismo primer elemento” (p. 203).

Así mismo es posible identificar el concepto de función mucho más estructurado según la concepción de Thomas et al. (2010), quien afirma “Sean X e Y conjuntos no vacíos, y sea f una colección de pares ordenados (x, y) , con $x \in X$ e $y \in Y$. Diremos

que f es una función de X en Y si para todo $x \in X$ existe un único $y \in Y$ ”. (p. 19).

y teniendo en cuenta de acuerdo con Roldán (2013) que, desde el punto de vista didáctico, es preciso abordar la rigurosidad de los conceptos, pero teniendo en cuenta el nivel para el cual se enseña, dada la complejidad algebraica, simbólica y el carácter abstracto del concepto de función, por lo que, aunque el concepto en grado noveno no se da en estos términos, si es posible apreciar que el estudiante si reconoce los conceptos de linealidad y función abordados.

Construcción Teórica

En este aparte se describe el constructo del concepto de función lineal realizado por los estudiantes, una vez analizada la construcción de las categorías de proporcionalidad y linealidad por parte de los estudiantes, observada en los trabajos realizados por ellos en su paso por los diferentes objetos virtuales de aprendizaje y a partir de los registros de representación semiótica tabular y gráfica.

Dentro de los constructos de los estudiantes sobre el concepto de función lineal y el uso de diferentes objetos virtuales de aprendizaje mediante el uso de la herramienta Matelengua en relación con la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval (1999) quien aborda los problemas de aprendizaje, en la relación existente entre las representaciones semióticas para algunas funciones cognitivas y el uso de las representaciones mentales, se evidenciaron diferentes situaciones constituidas al interior de los tratamientos y conversiones entre los registros semióticos del objeto matemático de la función lineal. Aportes teóricos al conocimiento sobre el enfoque noético-semiótico y el uso objetos virtuales de

aprendizaje mediante uso de herramienta Matelengua.

El análisis realizado desarrolló con 6 estudiantes de grado noveno, quienes participaron de manera voluntaria en el manejo de los diferentes objetos virtuales de aprendizaje, en el proceso realizado al interior del aula, se fueron entregando los diferentes OVA que se tenían para el objeto matemático de la función lineal, estos correspondían a las diferentes representaciones semióticas que se presentan en el objeto matemático.

El adecuado uso de las diferentes transformaciones semióticas permite de acuerdo con Duval (1999) adquirir funciones cognitivas, como el desarrollo de la visualización, la diferenciación de razonamientos que caracterizan el uso del lenguaje natural, aritmético, algebraico, cartesiano, tabular, gráfico y pictórico, así como la coordinación de dichos funcionamientos, llevando al estudiante a la construcción de representaciones mentales hacia el objeto matemático función lineal.

En la Figura 4 se presenta uno de los OVA a partir de un vídeo sobre tabulación de la función lineal permite que el estudiante lo retome para la práctica y comprensión del objeto matemático.

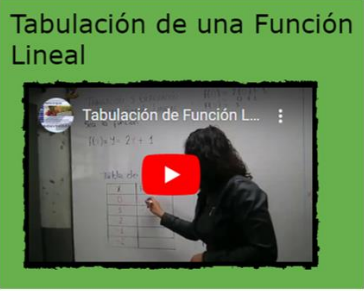
Figura 4: Objeto virtual de aprendizaje vídeo sobre tabulación de una función lineal, encontrado en Matelengua. Permite que el estudiante lo retome para la práctica y comprensión del objeto matemático.

OVA: TALLER Y VIDEO TABULACIÓN

Análisis semiótico del pensamiento matemático

Semiosis interpretativa → Semiosis expresiva

Tabulación de una Función Lineal



Debes colocar tabla de Valores y Gráfica en cada uno de los siguientes ejercicios.

- a) $Y=5x-2$
- b) $Y=-2x+3$
- c) $Y=3x$
- d) $Y=0,5x-8$

$y = 3x$

$Y(-2) = 3(-2) = -6$
 $Y(-1) = 3(-1) = -3$
 $Y(0) = 3(0) = 0$
 $Y(1) = 3(1) = 3$
 $Y(2) = 3(2) = 6$

X	Y
-2	-6
-1	-3
0	0
1	3
2	6

ESTUDIANTE 3

Este proceso de razonamiento en la comprensión de textos y la adquisición de tratamientos lógicos y matemáticos, involucra al estudiante en procesos de desarrollo del pensamiento y de los obstáculos para el aprendizaje, permite evidenciar las diferentes barreras que se van construyendo en la mente de los estudiantes y en las que se debe trabajar en el aprendizaje.

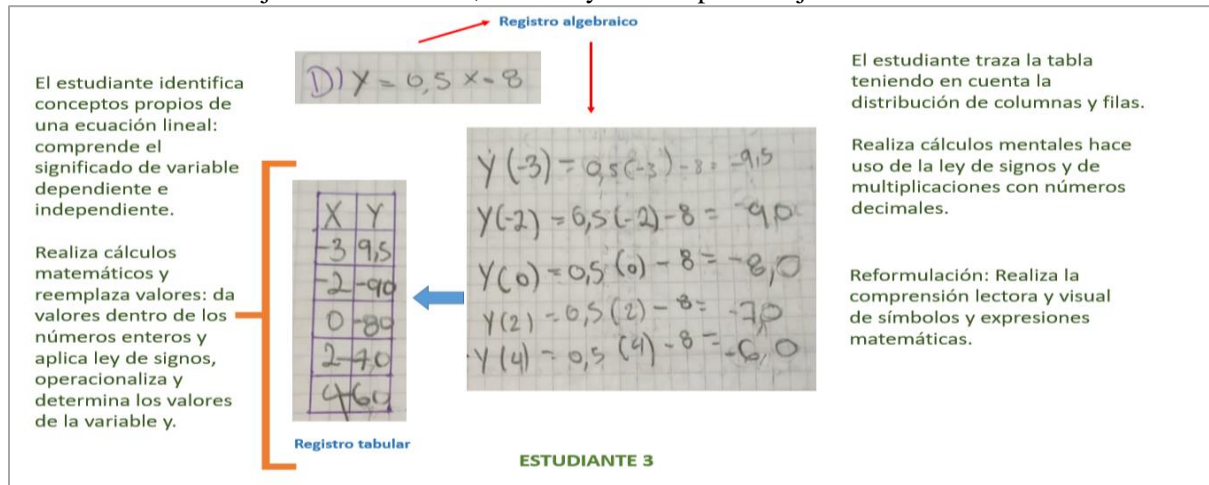
Dentro de este proceso de adquisición, se presentan fenómenos como la diversificación de los registros de representación semiótica, reconocer las diferencias entre la lengua natural y la lengua simbólica, procesos que exigen un suministro adecuado de la información cuando los estudiantes conocen los diferentes registros que se presentan en un objeto matemático, y deben realizar conversiones, puesto que la gran diversidad de representaciones semióticas no pueden dejarse en un mismo registro, es así como lo son las gráficas, tablas, plano cartesiano, entre otros para el objeto matemático función lineal.

En el análisis de estas situaciones presenciamos la hipótesis de Duval (1999-2004), quien establece que no hay noesis sin semiosis, lo que involucra permanentemente el papel que juega la necesidad de los registros semióticos a determinar que es la semiosis la que determina las condiciones de la noesis.

D'Amore (2012) quien precisa sobre la naturaleza del concepto y la función del concepto, permite reflexionar sobre la construcción del concepto de función lineal que alcanzaron los estudiantes, al llegar a la proporcionalidad, la relación de variables la linealidad, la continuidad y la relación de función en la concepción misma. Lo que conlleva a afirmar que la elección de los registros, las representaciones semióticas, el adecuado uso de las transformaciones en los tratamientos y conversiones permite para Duval (1993-1999) el aprendizaje de las matemáticas.

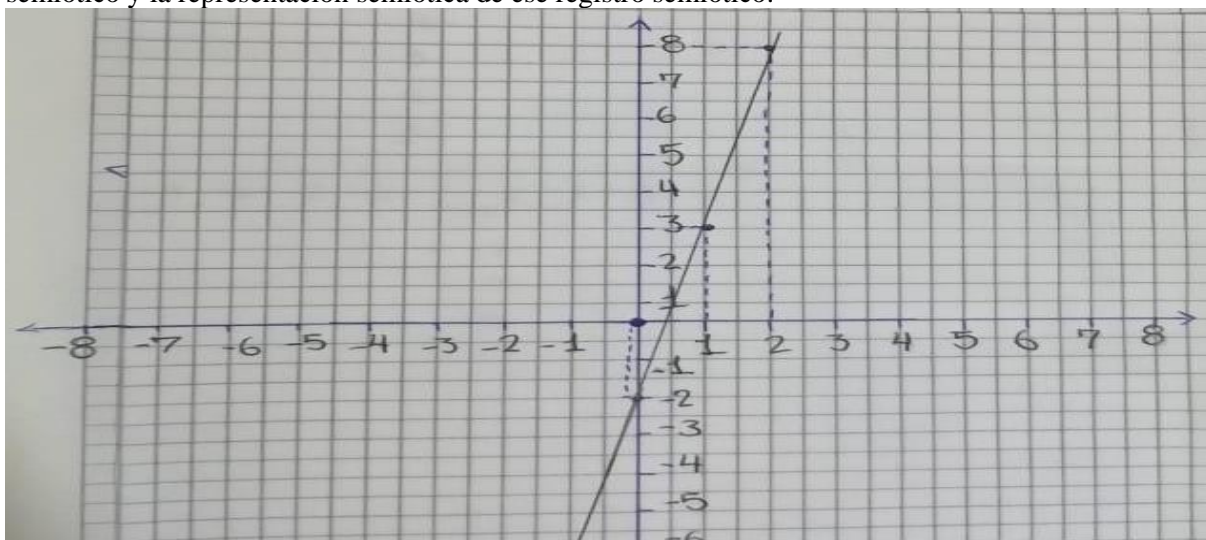
Al observar que el estudiante una vez analizado los problemas de proporcionalidad, parejas en el plano cartesiano y resolver un ejercicio propio de la función (Figura 5), llega a la conceptualización, lo que demuestra que la congruencia en la entrega de los registros semióticos y en la construcción personal y dimensional de los objetos matemáticos, contribuye en el aprendizaje.

Figura 5: Solución de un ejercicio de función lineal, el estudiante 3 llega a la conceptualización, lo que demuestra que la congruencia en la entrega de los registros semióticos y en la construcción personal y dimensional de los objetos matemáticos, contribuye en el aprendizaje.



El estudiante en el uso de tratamientos y conversiones maneja aspectos característicos de la semiótica del contenido u objeto matemático por representar, precisa la elección de las características distintivas del contenido en su registro semiótico y la representación semiótica de ese registro semiótico gráfico. (Figura 6).

Figura 6. Representación gráfica del objeto matemático función lineal. El estudiante en el uso de tratamientos y conversiones maneja aspectos característicos de la semiótica del contenido u objeto matemático por representar, precisa la elección de las características distintivas del contenido en su registro semiótico y la representación semiótica de ese registro semiótico.



Otro fenómeno es el de representante y representado o forma y contenido, puesto que no son fáciles de diferenciar presenta confusiones a la hora de llegar a la representación, en lo que se puede utilizar diferentes representaciones entre los tratamientos, que no prestan claridad, ni para el docente, ni para el estudiante.

Situación que se encontró en una de las entrevistas aplicadas a un estudiante que no hizo parte del proceso de aprendizaje por medio de OVA mediante el uso de Matelengua.

Entrevista Didáctica

Entrevistador: ¿Cuándo te digo función lineal, que es lo que entiendes por función lineal?

Entrevistado: lo que yo entiendo por función lineal, es cuando hablamos de tabular, de hacer gráficas, de coordenadas, del eje x y del eje y.

Entrevistador: ¿Qué te causó mayor dificultad para aprender?

Entrevistado: Lo que me causó mayor dificultad fue la gráfica, aunque hay personas que piensan que la tabulación es lo más difícil, pero las fórmulas realmente no son difíciles, lo que es difícil es cómo hacer para que te queden bien los espacios de la gráfica, para que sea una línea recta, para que sea horizontal, es más difícil graficar. Porque en la gráfica no estaban los números y no sabía cómo pasar los números a la gráfica.

Después del trabajo con OVA

Entrevistador: ¿Mejoraste tus procesos en cuanto a la gráfica de la función lineal?

Entrevistado: El profesor primero nos colocó un video de tabulación y gracias a este video pude sacar los números que corresponden correctamente para la gráfica, gracias al video pudimos hacer eso.

Entrevistador: ¿Cuál es el concepto de función lineal?

Entrevistado: es la relación de valores de x y y, es decir parejas ordenadas, en donde no puedo tener dos valores para y, solo uno, y en donde la gráfica es una línea recta.

Una vez analizada la entrevista inicial, coincide con la confusión que advierte Duval, en el aprendizaje intelectual fundamental de los objetos representados según Duval (1999) se debe tener en cuenta los análisis y condiciones de la semiosis, los tratamientos y las conversiones en los diferentes sistemas semióticos, no hacerlo constituye una confusión entre el objeto representado y la representación, no logra identificar dos

representaciones de un mismo objeto.

Bajo esa premisa es preciso corroborar según la teoría de Duval, elegir primero las características distintivas del objeto matemático, bajo análisis o en proceso de presentación, que para esta investigación es la función lineal. Elegir los registros semióticos en el cual se representa la función lineal, para nuestro caso los registros tabular y gráfico, (aunque es preciso aclarar que dentro del desarrollo de los diferentes ejercicios, los estudiantes hacen uso de otros registros como son el registro lengua natural, el registro aritmético y el registro algebraico), elegir las representaciones semióticas característica del registro elegido, como por ejemplo en el lenguaje algebraico los ejercicios de función lineal aplicados. Permitir en los estudiantes el tratamiento al interior del registro y la conversión, como en este caso pasar del registro tabular al registro gráfico.

En el registro gráfico se observó que las construcciones gráficas no son claras para los estudiantes, lo que requiere mayor atención a la hora del manejo de escalas y profundizar detenidamente cuando se deba realizar la conversión entre el registro tabular al registro gráfico.

CONCLUSIONES

Después de la investigación realizada se constata la teoría de Duval, se precisa en elegir primero las características distintivas del objeto matemático bajo análisis o en proceso de construcción, elegir los registros semióticos, las representaciones semióticas característica del registro elegido y permitir en los estudiantes el tratamiento al interior del registro y la conversión. Durante el proceso de aprendizaje del objeto matemático, se mantuvo la aplicación de la teoría de Duval, revisando las características del objeto matemático que para esta investigación fue la función lineal, luego se eligieron los registros semióticos y las representaciones semióticas en el cual se representa, para nuestro caso los registros tabular y gráfico, una vez seleccionados las representaciones se prestaron a los estudiantes en los diferentes OVA mediante la herramienta, realizando la observación de los tratamientos y conversiones que construyeron los estudiantes en el proceso.

Al realizar las observaciones es posible interpretar la construcción el objeto matemático función lineal que realizaron los estudiantes a partir de los registros de representación semiótica que se emplean en la

herramienta Matelengua, se logra describir la comprensión de los diferentes registros y representaciones, con ello se concluye que la congruencia en la entrega de los registros semióticos y en la construcción personal y dimensional de los objetos matemáticos, contribuye en el aprendizaje, dado que los estudiantes de acuerdo a los trabajos realizados y las entrevistas llegan a construir concepciones de proporcionalidad, la relación entre las variables dependiente e independiente, la linealidad y la continuidad hasta llegar a concebir la función lineal desde la concepción de relación de variables dado por Allendoerfer y Oakley (1990) al plantear la función lineal como un conjunto de pares ordenados (x,y) , así como que no hay dos pares con el mismo primer elemento y en la concepción de Thomas (1979) “y es una función de X en Y si para todo $x \in X$ existe un único $y \in Y$ ”.

Recordamos que, dada la complejidad algebraica, simbólica y el carácter abstracto del concepto de función, el concepto en grado noveno no se da en estos términos, más aún es posible apreciar que los estudiantes reconocieron los conceptos de linealidad y función abordados.

El trabajo con los OVA en la herramienta Matelengua permitió incorporar a los estudiantes de forma efectiva, dinámica, sólida, motivadora y contextualizada, consolidar un objetivo claro, se presenta como una estrategia pedagógica que evidencia la verdadera aprehensión de los objetos matemáticos, en este caso el objeto función lineal, desde la realidad, desde sus necesidades, enfocados hacia nuevos retos y desafíos en educación, incorporar la semiótica en la didáctica de la matemática con el objeto virtual de aprendizaje, evidenció mejor comprensión de la función lineal.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Allendoerfer, C. y Oakley, C. (1990). Fundamentos de Matemáticas Universitarias (4ª ed.). México: McGraw-Hill.

Bruner, J. S. (1964). The course of cognitive growth. American psychologist, 19(1), 1.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2007). The illusion of linearity: From analysis to improvement (Vol. 41). Springer Science & Business Media.

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (2002). The effects of different problem presentations and formulations on the illusion of linearity in secondary school students. Mathematical thinking and

- learning, 4(1), 65-89. Duval, R. (1993). Semiosis y noesis. En E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.), *Lecturas en didáctica de la matemática: Escuela Francesa* (pp. 118-144). México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels* (Vol. 4). Berne: Peter Lang.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143-168.
- Duval, Raymond (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En Duval, Raymond; Sáenz-Ludlow, Adalira (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas : perspectivas semióticas seleccionadas Énfasis* . (pp. 61-94). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Duval, R., & Duval, R. (2017). Mathematical activity and the transformations of semiotic representations. *Understanding the mathematical way of thinking—The registers of semiotic representations*, 21-43.
- D'Amore B. (2000). *La didáctica de las matemáticas en el cambio de milenio: raíces, conexiones e intereses, en las matemáticas y su enseñanza*.
- D'Amore B. (2004). *Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución*. Uno. Barcelona, España. 35, 90-106.
- D'Amore, Bruno, & Fandiño Pinilla, Martha Isabel. (2012). Análisis de situaciones de aula en el contexto de la práctica de investigación: un punto de vista semiótico. *Educación matemática*, 24(3), 89-117. Recuperado en 23 de abril de 2021, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S166558262012000300006&lng=es&tlng=es.

- Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2010). How do proportional and additive methods develop along primary and secondary school?. In Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology in Mathematics Education: mathematics in different settings (Vol. 2, pp. 353-360). PME.
- Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2010). Effect of number structure and nature of quantities on secondary school students' proportional reasoning.
- Fernández Verdú, C., & Llinares Ciscar, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas.
- Galeano, N. M. G. (2013). Estrategias Metodológicas aplicadas por los docentes para la atención de niñas (os) con necesidades educativas especiales, asociados a una discapacidad en III Grado "A" de la Escuela Oscar Arnulfo Romero de la ciudad de Estelí, durante el I semestre del añ. Revista Científica de FAREM-Estelí, (6).
- Glaser, B. G., & Strauss, A. L. (2017). Discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research. Routledge.
- Gómez, P. (2007). Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.
- Hancock, C., Kaput, J. J., & Goldsmith, L. T. (1992). Authentic inquiry with data: Critical barriers to classroom implementation. *Educational Psychologist*, 27(3), 337-364.
- Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on 'rate' problems. *Educational studies in Mathematics*, 14(3), 219-233.
- Kieran, C., & Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*.
- Lammon, S.J. (2007). Rational numbers and Proportional Reasoning: Toward a Theoretical Framework. En F.K. Leter Jr (Ed.) *Secound Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 629-668). NCTM-Information Age Publishing, Charlotte, NC.

- MATELENGUA NOVENO. (2015). matelengua. Recuperado el 10 de octubre de 2021, de <https://kbon1526.wixsite.com/matelengua/matelengua-noveno>
- Marín, M. E. G. (2012). Investigación cualitativa: Preguntas inagotables. Fondo Editorial FCSH.
- Martínez, N., & González, J. (2008). Construcción y uso significativo del concepto de proporcionalidad. Diseño e implementación de actividades desde la experiencia de investigación acción.
- Modestou, M., & Gagatsis, A. (2010). Cognitive and metacognitive aspects of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(1), 36-53.
- Muñoz Hernández, H. M. (2013). Modelos conceptuales de profesores de educación básica sobre las matemáticas y su enseñanza.
- Obando, G., Vasco, C., & Arboleda, L. (2009). Praxeologías matemáticas en torno al número racional, las razones, las proporciones y la proporcionalidad. Comunicación interna no publicada. Universidad del Valle. Cali.
- Obando, G., Vasco, C. E., & Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 17(1), 59-81.
- Obando, G. (2015). Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3 y 4 de una institución educativa de la Educación Básica (Doctoral dissertation, Universidad del Valle).
- Pecharromán, C. (2014). El aprendizaje y la comprensión de los objetos matemáticos desde una perspectiva ontológica. *Educación matemática*, 26(2), 111-133.
- Piaget, J., & Matalon, B. (1958). Note on the law of the temporal maximum of some optico-geometric illusions. *The American journal of psychology*, 71(1), 277-282.
- Puig, L., & Fernández, A. (2002). Una actividad matemática organizada en el marco de los modelos teóricos locales: razón y proporción en la escuela primaria.
- Radford, L. (1998). On signs and representations. A cultural account. *Scientia*.
- Rico Romero, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en

educación matemática. pna.

- Roldán, C. (2013). El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8° y 9° grados de educación básica. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. Bogotá.
- Sandoval, C. (2002). Módulo 4: Investigación cualitativa. Medellín: INER-Universidad de Antioquia.
- Sánchez, E. A. (2012). Razones, proporciones y proporcionalidad en términos de variación y correlación entre magnitudes: una posible forma para comprender la construcción de dichos objetos.
- Skemp, R. R. (1980). Intelligence, learning and action.
- Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J., Giordano, F. R., & Korkmaz, R. (2010). Thomas' calculus (Vol. 12). Boston: Pearson.
- Tourniaire, F. (1986). Proportions in elementary school. *Educational Studies in Mathematics*, 17(4), 401-412.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2004). Remediating secondary school students' illusion of linearity: A teaching experiment aiming at conceptual change. *Learning and Instruction*, 14(5), 485-501.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and instruction*, 23(1), 57-86.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Vleugels, K., & Verschaffel, L. (2008, July). Pupils' reasoning on proportionality: solving versus classifying missing-value word problems. In Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and 30th North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 369-376).
- Vygotsky, L. S. (1962). Thought and Language [Pensamiento y lenguaje]. Bruner (1964)