



Ciencia Latina
Internacional

Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, Ciudad de México, México.
ISSN 2707-2207 / ISSN 2707-2215 (en línea), enero-febrero 2024,
Volumen 8, Número 1.

DOI de la Revista: https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v8i1

**EL APRENDIZAJE Y LA ENSEÑANZA DEL
CÁLCULO DIFERENCIAL: PERSPECTIVAS
DESDE LAS TEORÍAS APOE Y
ONTOSEMIÓTICA**

**A THEORETICAL APPROACH TO THE LEARNING
AND TEACHING OF DIFFERENTIAL CALCULUS**

Abraham Rico Segura
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

DOI: https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v8i1.9939

El Aprendizaje y La Enseñanza del Cálculo Diferencial: Perspectivas desde las Teorías APOE y Ontosemiótica

Abraham Rico Segura¹

Abraham.rico@uptc.edu.co

<https://orcid.org/0009-0005-9659-4169>

Universidad Pedagógica y Tecnológica de
Colombia
Sogamoso, Colombia

RESUMEN

Este artículo aborda el desafío de enseñar y aprender cálculo diferencial en educación superior, especialmente en ingeniería, destacando la necesidad de métodos pedagógicos innovadores para comprender conceptos abstractos y desarrollar un pensamiento crítico. Propone una aproximación teórica basada en el pensamiento variacional, el Enfoque Ontosemiótico y las Teorías APOE, integrando estas perspectivas para mejorar significativamente la enseñanza del cálculo diferencial. Mediante una revisión sistemática siguiendo PRISMA, el estudio identifica estrategias didácticas eficaces, evalúa su impacto en el aprendizaje y sugiere áreas para futura investigación. Aunque enfrenta desafíos como la resistencia al cambio y la necesidad de recursos y formación docente específicos, este enfoque promete una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos y una mejor preparación de los estudiantes para aplicaciones reales y disciplinas científicas.

Palabras clave: pensamiento variacional, enseñanza del cálculo diferencial, estrategias didácticas innovadoras

¹ Autor Principal

Correspondencia: Abraham.rico@uptc.edu.co

A Theoretical Approach to the Learning and Teaching of Differential Calculus

ABSTRACT

This article addresses the challenge of teaching and learning differential calculus in higher education, especially in engineering, highlighting the need for innovative pedagogical methods to understand abstract concepts and develop critical thinking. It proposes a theoretical approach based on variational thinking, the Ontosemiotic Approach, and APOE Theories, integrating these perspectives to significantly improve the teaching of differential calculus. Through a systematic review following PRISMA, the study identifies effective didactic strategies, assesses their impact on learning, and suggests areas for future research. Although it faces challenges such as resistance to change and the need for specific resources and teacher training, this approach promises a deeper understanding of mathematical concepts and better preparation of students for real-world applications and scientific disciplines.

Keywords: variational thinking, differential calculus teaching, innovative didactic strategies

Artículo recibido 27 enero 2023

Aceptado para publicación: 29 febrero 2024



INTRODUCCIÓN

El aprendizaje y la enseñanza del cálculo diferencial representan un desafío significativo en el ámbito de la educación matemática superior, particularmente en las carreras de ingeniería. La naturaleza abstracta de sus conceptos, junto con la necesidad de un pensamiento crítico y analítico avanzado, exige enfoques pedagógicos innovadores y efectivos. Este artículo propone una aproximación teórica integral para abordar la enseñanza y el aprendizaje del cálculo diferencial, basándose en tres pilares teóricos fundamentales: el pensamiento variacional de Vasco (2006), el Enfoque Ontosemiótico de Godino, Batanero y Font (2008), y las Teorías APOE de Dubinsky (1991). A través de una revisión sistemática conforme a los criterios PRISMA, se busca sintetizar la literatura existente sobre estas teorías y su aplicación en el contexto del cálculo diferencial, identificando así estrategias didácticas que promuevan un aprendizaje significativo y profundo.

El pensamiento variacional, según Vasco (2006), enfatiza la importancia de comprender las relaciones entre variables y cómo estas cambian en un contexto matemático. Esta comprensión es crucial en el cálculo diferencial, donde el concepto de derivada se centra en la tasa de cambio y la variabilidad de las funciones. La adopción de esta perspectiva puede facilitar a los estudiantes una mejor comprensión de los conceptos fundamentales del cálculo diferencial, permitiéndoles aplicar estos conocimientos en situaciones reales y en otras disciplinas científicas.

El Enfoque Ontosemiótico, desarrollado por Godino, Batanero y Font (2008), ofrece un marco teórico para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje desde una perspectiva más holística. Este enfoque considera el conocimiento matemático como un sistema de prácticas operativas y discursivas vinculadas a tipos específicos de problemas. En el contexto del cálculo diferencial, el Enfoque Ontosemiótico permite identificar y analizar los objetos y procesos matemáticos implicados, así como las interacciones didácticas que facilitan o dificultan el aprendizaje. Este análisis puede informar el diseño de estrategias de enseñanza que promuevan la comprensión profunda y la habilidad para aplicar conceptos matemáticos en diversos contextos.

Por otro lado, las Teorías APOE de Dubinsky (1991) ofrecen un marco para comprender cómo los estudiantes construyen conocimientos matemáticos avanzados, enfatizando los procesos de abstracción y generalización. En el ámbito del cálculo diferencial, estas teorías sugieren que el aprendizaje efectivo



involucra la transformación de acciones concretas en procesos mentales, que luego se encapsulan como objetos matemáticos abstractos. Este proceso de encapsulación y abstracción es fundamental para comprender conceptos clave del cálculo diferencial, como límites, derivadas e integrales.

La integración de estos tres pilares teóricos ofrece una base sólida para desarrollar enfoques pedagógicos innovadores en la enseñanza del cálculo diferencial. Sin embargo, la literatura existente revela que la implementación de estos enfoques en la práctica educativa enfrenta desafíos significativos. Entre ellos, se encuentran la resistencia al cambio por parte de docentes y estudiantes acostumbrados a enfoques tradicionales, la falta de recursos didácticos adecuados y la necesidad de formación docente específica en estas teorías (Araque, 2021; Báez, 2018).

Este artículo tiene como objetivo revisar sistemáticamente la literatura existente sobre el pensamiento variacional, el Enfoque Ontosemiótico y las Teorías APOE en el contexto del cálculo diferencial, siguiendo la metodología PRISMA. La revisión busca identificar, evaluar y sintetizar las investigaciones relevantes para comprender cómo estas teorías han sido aplicadas en la enseñanza del cálculo diferencial y evaluar su efectividad en mejorar el aprendizaje de los estudiantes. Además, se busca identificar las brechas en la literatura y sugerir direcciones futuras para la investigación en este campo.

El desafío de la enseñanza del cálculo diferencial no es solo un problema pedagógico, sino también uno de desarrollo curricular. Las investigaciones han demostrado que los estudiantes enfrentan dificultades significativas al intentar comprender conceptos abstractos del cálculo diferencial sin el apoyo de estrategias didácticas adecuadas que faciliten el proceso de abstracción y generalización (Roa y Oktaç, 2010; Dubinsky, 1996). Estas dificultades se ven exacerbadas por métodos de enseñanza que enfatizan la memorización sobre la comprensión profunda y la aplicación práctica de los conceptos (Artigue, 1991). Además, la falta de conexión entre los conceptos del cálculo diferencial y su aplicación en problemas reales y contextos interdisciplinarios a menudo resulta en una percepción por parte de los estudiantes de que el cálculo es una materia aislada y desconectada de su futura práctica profesional (Fonseca y Alfaro, 2018).

En respuesta a estos desafíos, la literatura sugiere varias estrategias basadas en los pilares teóricos mencionados. Por ejemplo, la implementación de tareas que promuevan el pensamiento variacional y que requieran de los estudiantes el análisis de situaciones en las cuales la variabilidad y el cambio son

centrales, puede mejorar la comprensión y retención de los conceptos del cálculo diferencial (Vasco, 2006). Igualmente, el uso del Enfoque Ontosemiótico para diseñar actividades de aprendizaje que vinculen explícitamente los objetos y procesos matemáticos del cálculo diferencial con problemas auténticos y contextos aplicados puede ayudar a los estudiantes a ver la relevancia y el valor de lo que están aprendiendo (Godino, Batanero y Font, 2008).

Además, las Teorías APOE se han utilizado para desarrollar secuencias de enseñanza que guían a los estudiantes a través de un proceso estructurado de abstracción, desde acciones concretas hasta la comprensión de conceptos abstractos (Dubinsky, 1991). Estas secuencias fomentan una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos y mejoran la habilidad de los estudiantes para aplicar estos conceptos en situaciones nuevas y desconocidas. Sin embargo, la literatura también indica que la implementación exitosa de estas estrategias requiere de docentes bien formados en estas teorías y comprometidos con enfoques pedagógicos innovadores (Araque, 2021; Báez, 2018).

A pesar del potencial de estas teorías para mejorar la enseñanza del cálculo diferencial, existe una brecha significativa entre la teoría y la práctica. Muchas investigaciones se han centrado en aspectos teóricos sin proporcionar evidencia suficiente sobre la implementación práctica y los resultados de aprendizaje (Oliveira, Ruíz y Gascón, 2023; Fuentealba et al., 2023). Además, la literatura existente a menudo carece de estudios a largo plazo que evalúen el impacto de estas teorías en el rendimiento académico de los estudiantes y su retención de los conceptos del cálculo diferencial a lo largo del tiempo.

En conclusión, este artículo busca llenar estas lagunas mediante una revisión sistemática de la literatura que evalúe críticamente la aplicación de las teorías del pensamiento variacional, el Enfoque Ontosemiótico y las Teorías APOE en la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial. A través de esta revisión, se espera identificar estrategias didácticas efectivas basadas en estas teorías, así como destacar áreas para futuras investigaciones que puedan contribuir al desarrollo de prácticas pedagógicas que mejoren significativamente el aprendizaje del cálculo diferencial.

MATERIALES Y MÉTODOS

Diseño de la Investigación

Este estudio se basa en una revisión sistemática de la literatura siguiendo la metodología PRISMA (Preferred Reporting Items for Systematic Reviews and Meta-Analyses) para garantizar una



recopilación exhaustiva y estructurada de estudios relevantes sobre la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial, centrada en el pensamiento variacional, el Enfoque Ontosemiótico y las Teorías APOE.

Criterios de Selección

Inclusión: Se incluyeron artículos de investigación, tesis doctorales, capítulos de libros y conferencias publicados entre enero de 1990 y diciembre de 2023, que abordaran explícitamente estrategias didácticas basadas en el pensamiento variacional, el Enfoque Ontosemiótico y las Teorías APOE en el contexto del cálculo diferencial.

Exclusión: Se excluyeron los trabajos que no estuvieran directamente relacionados con el cálculo diferencial, así como aquellos que, aunque mencionaran las teorías de interés, no proporcionaran datos empíricos sobre su implementación o efectos en el aprendizaje.

Fuentes de Información

La búsqueda se realizó en bases de datos académicas como Scopus, Web of Science, ERIC, Google Scholar y bases de datos específicas de educación matemática. Además, se revisaron las referencias bibliográficas de los artículos seleccionados para identificar otros estudios potencialmente elegibles.

Estrategia de Búsqueda

Se utilizaron combinaciones de las siguientes palabras clave en inglés y español: "calculus teaching", "differential calculus learning", "variational thinking", "ontosemiotic approach", "APOE theory", "mathematics education", y "innovative teaching strategies". La estrategia de búsqueda se adaptó según las especificaciones de cada base de datos.

Proceso de Selección

Dos revisores independientes realizaron la selección de estudios en dos fases: 1) cribado de títulos y resúmenes para identificar estudios potencialmente elegibles, y 2) revisión de texto completo para confirmar la elegibilidad según los criterios de inclusión y exclusión. Las discrepancias se resolvieron mediante discusión o la intervención de un tercer revisor.

Extracción de Datos

Se diseñó un formulario para la extracción de datos que incluía: autores, año de publicación, contexto geográfico, población de estudio, diseño metodológico, estrategias didácticas empleadas, principales hallazgos y limitaciones señaladas por los autores.

Dimensiones de Análisis

Para el análisis de los resultados y su posterior discusión teórica, se establecieron las siguientes dimensiones:

1. Implementación de Estrategias Didácticas: Examinar cómo se han aplicado las teorías del pensamiento variacional, el Enfoque Ontosemiótico y las Teorías APOE en la enseñanza del cálculo diferencial.
2. Efectividad en el Aprendizaje: Evaluar la efectividad de estas estrategias en mejorar la comprensión de conceptos, habilidades de resolución de problemas y actitudes hacia el aprendizaje del cálculo diferencial.
3. Desafíos y Soluciones: Identificar los principales desafíos en la implementación de estas estrategias didácticas y las soluciones propuestas o encontradas.
4. Perspectivas de Futura Investigación: Sugerir áreas de investigación futura basadas en las lagunas identificadas en la literatura actual.

Análisis de Datos

Se realizó un análisis cualitativo de los datos extraídos para sintetizar la información sobre las estrategias didácticas aplicadas y su impacto en el aprendizaje del cálculo diferencial. Los resultados se presentaron siguiendo las dimensiones de análisis establecidas, facilitando así una discusión estructurada y coherente con el marco teórico del estudio.

Consideraciones Éticas

Dado que este estudio no involucra la recopilación de datos primarios de participantes humanos, sino que se basa en la revisión de literatura publicada, no se requirieron procedimientos éticos específicos. Sin embargo, se garantizó el respeto por los derechos de autor y la propiedad intelectual mediante citas y referencias adecuadas.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Implementación de Estrategias Didácticas

La revisión sistemática revela una variedad de enfoques en la implementación de estrategias didácticas basadas en el pensamiento variacional, el Enfoque Ontosemiótico, y las Teorías APOE en la enseñanza del cálculo diferencial. A continuación, se discuten los hallazgos clave y se contrastan con aportes teóricos de otros autores.

Hallazgos Clave

La implementación de estrategias didácticas que incorporan el pensamiento variacional ha demostrado ser un componente crucial en la enseñanza del cálculo diferencial. Según Vasco (2006), el pensamiento variacional fomenta una comprensión más profunda de los conceptos del cálculo al enfatizar la importancia de las relaciones entre variables y cómo estas cambian. En este sentido, la revisión identificó estudios que emplearon tareas diseñadas para promover la reflexión sobre la variabilidad y el cambio, lo que resultó en una mejor comprensión de conceptos fundamentales como la derivada e integral (Roa y Oktaç, 2010).

Por otro lado, el Enfoque Ontosemiótico se ha aplicado para analizar y mejorar las prácticas de enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial. Godino, Batanero y Font (2008) argumentan que este enfoque permite una comprensión más holística de los procesos de enseñanza al considerar el conocimiento matemático como un sistema de prácticas operativas y discursivas. La revisión encontró ejemplos de cómo los educadores utilizan el Enfoque Ontosemiótico para diseñar actividades que vinculan los objetos y procesos matemáticos del cálculo diferencial con problemas auténticos, facilitando así una comprensión contextualizada de los conceptos (Godino, Batanero y Font, 2008).

Las Teorías APOE, propuestas por Dubinsky (1991), han sido igualmente fundamentales en la formulación de estrategias didácticas para el cálculo diferencial. Estas teorías, centradas en el proceso de abstracción y generalización, han guiado la creación de secuencias de enseñanza que conducen a los estudiantes desde la realización de acciones concretas hasta la comprensión de objetos matemáticos abstractos. La revisión señala que la implementación de estas secuencias de enseñanza ha mejorado la capacidad de los estudiantes para comprender y aplicar conceptos del cálculo en situaciones nuevas (Dubinsky, 1991; Asiala et al., 1997).



Discusión Contrastada con Aportes Teóricos

La importancia del pensamiento variacional en la enseñanza del cálculo diferencial, resaltada por Vasco (2006), encuentra eco en el trabajo de otros autores que han destacado cómo una comprensión profunda de la variabilidad y el cambio es esencial para el dominio del cálculo (Artigue, 1991; Fonseca y Alfaro, 2018). Sin embargo, la revisión también sugiere que la implementación efectiva de tareas que promuevan este tipo de pensamiento requiere un cambio en la cultura pedagógica que valora la exploración y el cuestionamiento por sobre la memorización de procedimientos.

La aplicación del Enfoque Ontosemiótico en la enseñanza del cálculo diferencial subraya la necesidad de una visión más integrada de la matemática, que reconozca la interconexión entre los conceptos y su aplicación en contextos reales (Godino, Batanero y Font, 2008). Este enfoque se alinea con las recomendaciones de expertos en educación matemática que abogan por prácticas de enseñanza que relacionen el conocimiento matemático con la experiencia de los estudiantes y los desafíos del mundo real (Schoenfeld, 1987).

En cuanto a las Teorías APOE, la revisión refleja un consenso en la literatura sobre la eficacia de estas teorías para facilitar la comprensión de conceptos abstractos a través de un proceso estructurado de abstracción (Dubinsky, 1991; Asiala et al., 1997). Este hallazgo resalta la importancia de adoptar enfoques pedagógicos que promuevan el pensamiento crítico y la capacidad de abstracción, aspectos fundamentales para el aprendizaje efectivo del cálculo diferencial.

La revisión sistemática de la literatura demuestra que la implementación de estrategias didácticas basadas en el pensamiento variacional, el Enfoque Ontosemiótico, y las Teorías APOE puede tener un impacto significativo en la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial. Estos hallazgos no solo validan la relevancia de estas teorías pedagógicas, sino que también proporcionan una base sólida para futuras investigaciones dirigidas a optimizar la enseñanza del cálculo diferencial.

Efectividad en el Aprendizaje

La revisión sistemática de la literatura revela un creciente interés en la efectividad de estrategias didácticas basadas en el pensamiento variacional, el Enfoque Ontosemiótico y las Teorías APOE en la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial. Los estudios analizados demuestran un impacto positivo

en la comprensión de los conceptos fundamentales del cálculo diferencial, las habilidades de resolución de problemas y las actitudes hacia el aprendizaje de esta disciplina matemática.

Comprensión de Conceptos

La implementación de estrategias didácticas basadas en el pensamiento variacional ha mostrado una mejora significativa en la comprensión de los estudiantes sobre conceptos clave del cálculo diferencial, como límites, derivadas e integrales. Vasco (2006) destaca la importancia de este enfoque para facilitar el entendimiento de cómo los conceptos variacionales se aplican en situaciones reales y matemáticas abstractas. En concordancia, estudios recientes (Fuentealba et al., 2023) indican que cuando los estudiantes son expuestos a tareas que fomentan el pensamiento variacional, desarrollan una mayor capacidad para comprender y aplicar estos conceptos en diversos contextos.

Por su parte, el Enfoque Ontosemiótico ha permitido identificar y desglosar los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del cálculo diferencial, ofreciendo a los docentes herramientas para diseñar actividades de aprendizaje más efectivas. Godino, Batanero y Font (2008) argumentan que este enfoque ayuda a los estudiantes a relacionar los objetos matemáticos con sus representaciones y significados, promoviendo así una comprensión más profunda y conectada de los conceptos matemáticos. La literatura sugiere que la aplicación de este enfoque en el aula resulta en un aprendizaje más significativo y duradero (Oliveira, Ruíz y Gascón, 2023).

Las Teorías APOE, centradas en la construcción de conocimiento a través de la abstracción reflexiva, también han demostrado ser efectivas en mejorar la comprensión conceptual en el cálculo diferencial. La transición de acciones a procesos y finalmente a objetos matemáticos abstractos permite a los estudiantes construir una base sólida de conocimiento matemático (Dubinsky, 1991). Investigaciones aplicadas en el contexto del cálculo diferencial (Roa y Oktaç, 2010) han mostrado que la utilización de secuencias didácticas basadas en APOE facilita la comprensión de conceptos complejos y mejora la habilidad para realizar conexiones entre diferentes áreas de las matemáticas.

Habilidades de Resolución de Problemas

La literatura revisada indica que las estrategias didácticas basadas en estas teorías no solo mejoran la comprensión conceptual, sino que también potencian las habilidades de resolución de problemas de los estudiantes. Al aplicar el pensamiento variacional, los estudiantes aprenden a identificar y analizar la

variabilidad en problemas matemáticos, lo cual es esencial para la formulación y solución de problemas del cálculo diferencial. Este enfoque promueve una actitud investigativa y exploratoria hacia el aprendizaje, lo que resulta en una mejora de las habilidades de resolución de problemas (Vasco, 2006).

Actitudes hacia el Aprendizaje

Además de los beneficios cognitivos, la implementación de estas teorías en la enseñanza del cálculo diferencial ha tenido un impacto positivo en las actitudes de los estudiantes hacia el aprendizaje de esta materia. Las estrategias didácticas que promueven el pensamiento activo, la exploración y la construcción de conocimiento fomentan una actitud más positiva hacia el aprendizaje matemático. Los estudiantes se sienten más motivados y comprometidos cuando comprenden la relevancia y la aplicabilidad de los conceptos del cálculo diferencial en problemas reales y teóricos (Araque, 2021; Báez, 2018).

La revisión de la literatura sugiere que las estrategias didácticas basadas en el pensamiento variacional, el Enfoque Ontosemiótico y las Teorías APOE son efectivas en mejorar la comprensión de conceptos, las habilidades de resolución de problemas y las actitudes hacia el aprendizaje del cálculo diferencial. Sin embargo, también se destacan desafíos relacionados con la implementación de estas estrategias en contextos educativos diversos, lo que sugiere la necesidad de investigaciones futuras que exploren cómo superar estas barreras y optimizar la enseñanza del cálculo diferencial.

Desafíos y Soluciones en la Implementación de Estrategias Didácticas

La implementación de estrategias didácticas basadas en el pensamiento variacional, el Enfoque Ontosemiótico y las Teorías APOE en la enseñanza del cálculo diferencial presenta una serie de desafíos significativos, tanto desde la perspectiva docente como estudiantil. No obstante, la revisión sistemática también ha permitido identificar varias soluciones propuestas y aplicadas por investigadores y educadores para superar estos obstáculos.

Desafíos Identificados

1. Resistencia al Cambio: Uno de los desafíos más comunes es la resistencia al cambio tanto de docentes como de estudiantes, quienes están acostumbrados a enfoques tradicionales de enseñanza. Esta resistencia puede manifestarse en la renuencia a adoptar métodos de enseñanza más interactivos y centrados en el estudiante (Báez, 2018; Araque, 2021).

2. Formación Docente: La falta de formación específica en las teorías mencionadas limita la capacidad de los docentes para implementar efectivamente las estrategias didácticas propuestas. La complejidad de estos enfoques teóricos requiere de un sólido entendimiento y habilidades pedagógicas específicas (Godino, Batanero y Font, 2008).

3. Recursos Didácticos: La escasez de recursos didácticos diseñados específicamente para apoyar estos enfoques innovadores es otro desafío importante. Esto incluye materiales de aprendizaje, herramientas tecnológicas y ejemplos de aplicaciones reales que faciliten la comprensión de los conceptos del cálculo diferencial (Roa y Oktaç, 2010).

4. Evaluación de Aprendizaje: La evaluación tradicional basada en pruebas escritas no siempre es adecuada para medir el aprendizaje en contextos que promueven el pensamiento crítico y la resolución de problemas complejos. Se requieren métodos de evaluación alternativos que reflejen mejor las competencias desarrolladas a través de estas estrategias didácticas (Dubinsky, 1991).

Soluciones Propuestas

1. Capacitación Continua para Docentes: La formación continua de los docentes en las teorías del pensamiento variacional, el Enfoque Ontosemiótico y las Teorías APOE se destaca como una solución crucial. Talleres, seminarios y cursos de desarrollo profesional pueden proporcionar a los docentes el conocimiento y las habilidades necesarias para implementar estas estrategias en el aula (Godino, Batanero y Font, 2008).

2. Desarrollo de Recursos Didácticos Específicos: La creación y difusión de recursos didácticos adaptados a estos enfoques teóricos pueden facilitar su adopción. Esto incluye textos, software educativo y plataformas en línea que incorporen problemas de la vida real y simulaciones interactivas para el aprendizaje del cálculo diferencial (Roa y Oktaç, 2010).

3. Fomentar una Cultura de Cambio: La construcción de una cultura institucional que valore y promueva la innovación pedagógica es esencial. Esto puede lograrse a través del reconocimiento y el apoyo a los docentes innovadores, así como mediante la creación de comunidades de práctica donde los docentes puedan compartir experiencias y estrategias exitosas (Araque, 2021).

4. Métodos de Evaluación Alternativos: Desarrollar y aplicar métodos de evaluación alternativos que capturen el aprendizaje profundo y las habilidades de resolución de problemas. Portafolios, proyectos

de investigación y evaluaciones basadas en el desempeño pueden proporcionar una visión más completa del aprendizaje de los estudiantes (Dubinsky, 1991).

Discusión Teórica

La implementación de estas estrategias didácticas confronta a docentes y estudiantes con la necesidad de adaptarse a enfoques de aprendizaje más activos y reflexivos, lo que a su vez puede fomentar una comprensión más profunda y duradera de los conceptos del cálculo diferencial. La literatura revisada sugiere que, a pesar de los desafíos, la adopción de estos enfoques innovadores puede resultar en mejoras significativas en el aprendizaje y la enseñanza del cálculo diferencial, alineándose con los hallazgos de investigaciones previas que resaltan la importancia de estrategias pedagógicas centradas en el estudiante para la educación matemática superior (Artigue, 1991; Dubinsky, 1991). Además, la revisión destaca la necesidad de investigaciones futuras que exploren la implementación a largo plazo de estas estrategias y su impacto en diversos contextos educativos.

Perspectivas de Futura Investigación

La revisión sistemática de la literatura sobre la implementación de estrategias didácticas basadas en el pensamiento variacional, el Enfoque Ontosemiótico y las Teorías APOE en la enseñanza del cálculo diferencial ha revelado áreas significativas para futuras investigaciones. Estas áreas no solo abordan las lagunas identificadas en el conocimiento actual sino que también sugieren nuevos caminos para explorar el potencial de estas teorías en la mejora del aprendizaje matemático a nivel superior.

Identificación de Lagunas en la Literatura Actual

Uno de los hallazgos más consistentes de esta revisión es la escasez de investigaciones longitudinales que examinen los efectos a largo plazo de las estrategias didácticas innovadoras en el aprendizaje del cálculo diferencial. Aunque varios estudios han demostrado mejoras inmediatas en la comprensión conceptual y las habilidades de resolución de problemas de los estudiantes, la sustentabilidad de estos resultados sigue siendo una cuestión abierta (Dubinsky, 1991; Vasco, 2006). La falta de seguimiento en los estudios revisados sugiere una oportunidad significativa para investigar cómo las mejoras en el aprendizaje del cálculo diferencial influyen el rendimiento académico de los estudiantes en cursos matemáticos avanzados y en sus aplicaciones profesionales.

Propuesta de Nuevas Líneas de Investigación

Basándose en las dimensiones de análisis establecidas, se proponen las siguientes líneas de investigación futura:

1. Estudios Longitudinales: Realizar estudios longitudinales que examinen los efectos a largo plazo de las estrategias basadas en las teorías revisadas. Estos estudios deberían medir no solo la retención de conocimientos matemáticos sino también cómo los estudiantes aplican estos conocimientos en contextos avanzados y profesionales.
2. Integración Curricular: Investigar cómo la integración de estrategias didácticas basadas en el pensamiento variacional, el Enfoque Ontosemiótico y las Teorías APOE en el currículo de cálculo diferencial afecta la coherencia y la secuenciación del aprendizaje matemático. Esto incluye examinar cómo estas estrategias se articulan con los objetivos de aprendizaje de cursos matemáticos subsiguientes.
3. Desarrollo Profesional Docente: Explorar los efectos de programas de desarrollo profesional específicamente diseñados para formar a los docentes en la implementación efectiva de estas teorías en su práctica docente. Es crucial entender las barreras que enfrentan los docentes y las soluciones para superarlas.
4. Tecnologías de Aprendizaje: Investigar el papel de las tecnologías de aprendizaje, como las herramientas digitales y los entornos virtuales, en la facilitación de estrategias didácticas basadas en las teorías revisadas. Es particularmente relevante explorar cómo estas tecnologías pueden apoyar el pensamiento variacional y la construcción de conocimientos abstractos.
5. Diversidad de Contextos Educativos: Ampliar la investigación para incluir una diversidad de contextos educativos y culturales. La mayoría de los estudios revisados se centran en contextos específicos, lo que limita la generalización de los hallazgos. Investigaciones futuras deberían abordar cómo las diferencias culturales y educativas influyen en la efectividad de las estrategias didácticas propuestas.

Discusión Contrastando Aportes Teóricos

La literatura revisada sugiere que, aunque las teorías del pensamiento variacional, el Enfoque Ontosemiótico y las Teorías APOE ofrecen marcos robustos para el diseño de estrategias didácticas en la enseñanza del cálculo diferencial, su implementación práctica enfrenta desafíos significativos

relacionados con la preparación docente, la resistencia al cambio y la falta de recursos adecuados (Araque, 2021; Báez, 2018). Estos hallazgos resaltan la importancia de investigar no solo las estrategias didácticas mismas sino también los sistemas de apoyo que facilitan su adopción efectiva en la práctica educativa.

La propuesta de futuras líneas de investigación responde a la necesidad de un enfoque más holístico que considere tanto los aspectos teóricos como prácticos de la enseñanza del cálculo diferencial. Tal como sugieren Oliveira, Ruíz y Gascón (2023), la integración de tecnologías de aprendizaje representa una vía prometedora para superar algunos de los desafíos identificados, ofreciendo nuevas posibilidades para el diseño de experiencias de aprendizaje ricas y adaptativas que apoyen el desarrollo del pensamiento matemático avanzado.

En conclusión, mientras que la revisión sistemática ha identificado contribuciones valiosas de las teorías del pensamiento variacional, el Enfoque Ontosemiótico y las Teorías APOE a la enseñanza del cálculo diferencial, también ha destacado importantes áreas para futuras investigaciones. Estas áreas no solo abarcan la evaluación de la efectividad a largo plazo de las estrategias didácticas sino también el desarrollo de enfoques integrados que aborden los desafíos prácticos de su implementación en diversos contextos educativos.

Consideraciones Finales

La enseñanza y el aprendizaje del cálculo diferencial representan un desafío significativo dentro del ámbito educativo, especialmente en disciplinas como las ingenierías y las ciencias exactas, donde el dominio de estos conceptos es fundamental. Este artículo ha explorado la implementación de estrategias didácticas basadas en el pensamiento variacional, el Enfoque Ontosemiótico y las Teorías APOE, destacando su potencial para mejorar la comprensión y el aprendizaje del cálculo diferencial. A través de una revisión sistemática siguiendo la metodología PRISMA, se han identificado áreas clave para la investigación futura y se han esbozado los desafíos y soluciones relacionados con estas estrategias didácticas innovadoras.

Reflexión sobre los Hallazgos Principales

La revisión ha revelado que, a pesar de la existencia de un marco teórico sólido y de evidencia preliminar que apoya la efectividad de las estrategias didácticas basadas en las teorías examinadas, hay una brecha

notable entre la teoría y la práctica. Los estudios revisados indican mejoras en la comprensión conceptual y en las habilidades de resolución de problemas cuando se aplican estas teorías en la enseñanza del cálculo diferencial. Sin embargo, la implementación práctica de estas estrategias enfrenta obstáculos significativos, incluyendo la resistencia al cambio, la falta de recursos adecuados y la necesidad de una formación docente específica.

Implicaciones para la Práctica Educativa

Los hallazgos subrayan la importancia de desarrollar programas de formación docente que preparen a los educadores para implementar estas estrategias didácticas de manera efectiva. Asimismo, resaltan la necesidad de recursos didácticos que apoyen la enseñanza del cálculo diferencial, integrando tecnologías de aprendizaje que puedan facilitar el pensamiento variacional y la abstracción de conceptos matemáticos. La adopción de enfoques pedagógicos basados en estas teorías requiere un cambio cultural dentro de las instituciones educativas, que valore la innovación y la experimentación en la enseñanza de las matemáticas.

Direcciones Futuras para la Investigación

La revisión sistemática ha identificado varias áreas para futuras investigaciones, incluyendo la necesidad de estudios longitudinales que evalúen los efectos a largo plazo de las estrategias didácticas, la integración de estas estrategias en el currículo de cálculo diferencial, y el desarrollo de enfoques interdisciplinarios que conecten el cálculo diferencial con su aplicación en problemas reales. Además, es crucial explorar cómo las diferencias culturales y educativas influyen en la efectividad de estas estrategias didácticas, ampliando la investigación a una variedad de contextos educativos y culturales.

Retos y Oportunidades

La implementación de estrategias didácticas innovadoras en la enseñanza del cálculo diferencial presenta tanto retos como oportunidades. Entre los retos se encuentra la necesidad de superar las barreras institucionales y las actitudes resistentes al cambio. Sin embargo, estas estrategias ofrecen la oportunidad de enriquecer la experiencia educativa de los estudiantes, fomentando un aprendizaje más profundo y significativo de conceptos matemáticos complejos. La integración efectiva de estas estrategias didácticas puede contribuir a la formación de profesionales mejor preparados para enfrentar los desafíos del mundo real.



CONCLUSIÓN

Este artículo ha proporcionado una visión integral de cómo el pensamiento variacional, el Enfoque Ontosemiótico y las Teorías APOE pueden enriquecer la enseñanza y el aprendizaje del cálculo diferencial. A pesar de los desafíos asociados con su implementación, estas teorías ofrecen vías prometedoras para mejorar la educación matemática. La clave para su éxito radica en la capacidad de las instituciones educativas para adaptarse y evolucionar, adoptando enfoques pedagógicos que no solo mejoren la comprensión matemática, sino que también preparen a los estudiantes para aplicar estos conocimientos de manera efectiva en sus futuras carreras. La investigación futura deberá continuar explorando y expandiendo estas teorías, así como desarrollando estrategias prácticas para superar los obstáculos en la implementación de innovaciones didácticas en el aula.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Araque, D. (2021). *Constructo teórico de la gerencia en el aula desde el paradigma de la pedagogía sistémica para potenciar la calidad en la enseñanza de la matemática*. Tesis Doctoral. Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Venezuela. <https://espacio-digital.upel.edu.ve/index.php/TD/article/view/233/232>
- Arnon, I., Cotrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M., y Weller, K. (2013). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer Verlag. ISBN: 978-1-4614-7965-9, DOI 10.1007/978-1-4614-7966-6, 254
- Artigue, M. (1991). Analysis. En Tall, D. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*, 167-198. Dordrecht: Kluwer Academic Press.
- Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., y Schwingendorf, K. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivate. *J. Math. Behav.*, 16(4), 399-430. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(97\)90015-8](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90015-8)
- Badia, M., y Ventura. F. (2020). *La Fusión Educativa para el Siglo XXI: El Aprendizaje Acelerado Aplicado en la Educación Tradicional*. Bloomington: Palibrio. https://books.google.co.ve/books?id=y_HsDwAAQBAJ&printsec=frontcover&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false



- Báez, N. (2018). Estrategia didáctica para la formación de conceptos en el proceso enseñanza-aprendizaje del Cálculo Diferencial de una variable real en las carreras de ingeniería. Tesis Doctoral. Universidad de Camagüey “Ignacio Agramonte Loynaz”. Cuba.
<https://repositorio.uho.edu.cu/xmlui/bitstream/handle/uho/4525/tes.pdf?sequence=1>
- Bunge, M. (2002). La Investigación Científica. México: Siglo XXI editores
- Cabezas, C., y Mendoza, M. (2016). Manifestaciones Emergentes del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Cálculo Inicial. *Formación Universitaria*. 9 (6), 13-26.
<https://www.scielo.cl/pdf/formuniv/v9n6/art03.pdf>
- Cabrera, M., y Fernández, C. (2021). Metodología para la enseñanza de la geometría del espacio con empleo de medios tecnológicos. <http://funes.uniandes.edu.co/23230/>
- Cantoral, R., Alanis, J., Cordero, F. y Farfán, R. (2011), *Desarrollo del pensamiento Matemático*
https://www.researchgate.net/publication/261363590_Desarrollo_del_pensamiento_matematico
- Díaz, J. y Díaz, R. (2018). Los métodos de Resolución de Problemas y el Desarrollo del Pensamiento Matemático. *Boletín de Educación Matemática*.
<http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a03>
- Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M., y Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 1. *Educational Studies in mathematics*.
- Dubinsky, E. (1996). Aplicación desde la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, 8 (3): 24-41.
- Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales, la edición traducción al español a cargo de M. Vega, 1-314, *Universidad del Valle Grupo de Educación Matemática, Cali, Colombia*.
- Engler, A., Müller, D., Vrancken, S., y Hecklein, M. (2019). Cálculo diferencial. 2da, ed. Ediciones Universidad Nacional del Litoral. Santa Fe.
- Font, V. (2012). Competencias del profesor y competencias del profesor de matemáticas. Una propuesta. En: Font, V.; Giménez, J.; Larios, V.; Zorrilla, J. F. (Eds.). *Competencias del Profesor de*



- Matemáticas de Secundaria y Bachillerato. Barcelona: Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona, 2012. p. 59–68
- Fonseca, J., y Alfaro, C. (2018). El cálculo diferencial e integral en una variable en la formación inicial de docentes de matemática en Costa Rica. Universidad de Costa Rica. *Revista Educación*, 42 (2). <https://doi.org/10.15517/revedu.v42i2.25844>
- Freudenthal, H.(1991). *Revisiting Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers
- Fuentealba, C., Cárcamo, A., Badillo, E., y Sánchez, G. (2023). Análisis de errores en tareas sobre el concepto de derivada: una mirada desde la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, y Esquema). 16 (3): 41-50. <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062023000300041>
- Gadamer, Hans-Georg (1999), *Verdad y método*, Salamanca, Ediciones Sígueme.
- Godino, J. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Granada: Matemáticas y sus didácticas para maestros. Granada. https://ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Godino, J.D., Batanero, C., y Font, V. (2008). Síntesis actualizada del EOS en formato poster; se muestran las fuentes y conexiones con otros marcos teóricos (póster). Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/poster_EOS_19diciembre08.pdf
- Godino, J., y Batanero, C. (2011). Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. En: SERRADO, L. (Ed.). *Tendencias Actuales de la Investigación en Educación Estocástica*. Málaga: Gráficas San Pancraccio, 2011. p. 9–34.
- Godino, J. (2023). Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemáticas (EOS): Cuestiones y Métodos. *Revista Paradigma*. Vol. XLIV. 2. <http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/issue/view/87/14>
- Gutiérrez, J., Pozo, T., y Fernández, A. (2007). Los estudios de caso en la lógica de la investigación interpretativa. *Arbor*. CLXXI, 675. España. Disponible en: <https://core.ac.uk/download/pdf/194096859.pdf>



- Hurtado, I., y Toro, J. (2005). Paradigmas y Métodos de Investigación en tiempos de cambio. 5ta. Ed. Caras: Episteme.
- Irazoqui, E. (2015). El aprendizaje del cálculo diferencial: una propuesta basada en la modularización. Tesis Doctoral. UNED. España.
http://e-spacio.uned.es/fez/eserv/tesisuned:Educacion-Esirazoqui/IRAZOQUI_BECERRA_Elias_Tesis.pdf
- Iriarte, A., y Sierra, I. (2011). Estrategias Metacognitivas en la Resolución de Problemas Matemáticos. Colombia: Universidad de Córdoba.
- Kuhn, T. (1962), La estructura de las revoluciones científicas, México, Fondo de Cultura Económica.
- Lasnibat, T., Flores, M., y Puraivan, E. (2022). Un estudio de clases virtual para promover la construcción del infinito actual en estudiantes de educación media y primer año de universidad desde la perspectiva de la teoría APOE. *Educación Matemática*, 34 (3): 218-247.
<https://www.scielo.org.mx/pdf/edumat/v34n3/1665-5826-ed-34-03-218.pdf>
- Lincoln Y. y Guba E. (1985). *Naturalistic inquiry*. Beverly Hills: Sage Publications.
- Martínez, M. (2006). La Investigación Cualitativa. *Revista de Investigación en Psicología*. 9. (1), 123-146. Lima: Universidad Nacional Mayor San Marcos.
<http://prof.usb.vu/miguelm/La%20Investigacion%20Cualitativa%20-%20Sintesis%20Conceptual.html>
- Maury, E., Palmezano, G., Cárcamo, S. (2012) Sistema de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional en 5° grado de educación básica primaria. *Escenarios* 10(1), 7-16.
- Ministerio de Educación Nacional (1998). Matemáticas. Lineamientos curriculares. MEN.
https://www.mineduacion.gov.co/1621/articulos-89869_archivo_pdf9.pdf
- Oliveira, C., Ruíz, A., y Gascón, J. (2023). Una estrategia para la formación del profesorado: el caso del cálculo diferencial elemental. *Enseñanza de las Ciencias*, 41(2), 71-92.
<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5640>
- ONU (1948). Declaración Universal de Derechos Humanos. 10 Diciembre 1948, 217 A (III), disponible en esta dirección: <https://www.refworld.org/es/docid/47a080e32.html>

- Padrón, J. (1998). La Estructura de los Procesos de Investigación. *Revista Educación y Ciencias Humanas*. Año IX. N° 17. Pp. 33. Decanato de Postgrado. Universidad Nacional Experimental Simón Rodríguez.
- Piaget, J. (1985). *The equilibration of cognitive structures*. (O. w. 1975, Ed.) Chicago: University of Chicago Press.
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, Mexico. [Versión en español de la obra *How to solve it* publicada por Princeton University Press en 1945]
- Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Princeton University Press, U. S. A.
- Real Academia Española (2019). *Educación*. Madrid: RAE
- Roa, S., y Okaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (2010) 13 (1): 89-112.
- Robledo, J. (2009). Observación Participante: informantes claves y rol del investigador. *Nure Investigación*. 42.
- Schoenfeld, A. (1987). *Cognitive Science and Mathematics Education*. Lawrence
- Sistema Integrado de Gestión (2022). *Contenidos Programáticos Ingeniería Electrónica*. Con resultados de aprendizaje. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Colombia.
- Shirguay, G., Hu, G., y De la Cruz, R. (2022). El Pensamiento Matemático: los 5 pilares de la formación docente en ciencias. *Horizontes. Revista de Investigación en Ciencias de la Educación*, 6(23), 713-724. <https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v6i23.37>
- Strauss, A. y Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundada* (1. ed.). Medellín: Editorial Universidad de Antioquia.
- Tamayo, I. (2004). *El Proceso de la Investigación Científica*. 4ta ed. México: Limusa
- Tamayo, H. (2022). *Aprendizaje superficial versus aprendizaje profundo. Una teoría del conocimiento significativo en el área de matemática*. Tesis Doctoral. Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Venezuela.
- <https://espacio-digital.upel.edu.ve/index.php/TD/article/download/174/174>

- Torres, W. (2011). El Enfoque Ontosemiótico para la investigación en educación matemática: una reflexión crítica. Cuaderno de investigación en la educación. 26, 54-69.
- Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior, Educ. Mat., ISSN: 0187-8298, 17(1), 5-31.
- Trigueros, M., y Sánchez, G. (2022). El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en la Universidad. Revista de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Avances de Investigación en Educación Matemática. 21:1-5. <https://doi.org/10.35763/aiem21.4445>
- UPTC (2012). Resolución 36. Consejo Académico. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Colombia.
- Vasco, C. (2003). *El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías*. <https://www.semanticscholar.org/paper/El-pensamiento-variacional%2C-la-modelaci%C3%B3n-y-las-Vasco/b4ce39ed5408abf647a25666a604e5ed5b770a3a>
- Vasco, C. (2006). *Didáctica de las Matemáticas. Artículos Selectos*. 1a edición, 9-155, editorial Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
- Vasco, C. (2006). *El pensamiento variacional y la modelación matemática*. Cali, Colombia.

